

# ANÁLISIS DE LOS MODELOS 3D PARA LA SIMULACIÓN DE FLUJO EN AGUAS DE TRANSICIÓN

Sonia Castanedo y Raúl Medina

## Resumen

Actualmente, las aguas de transición, definidas por la Directiva Marco del Agua 2000/60/CE como masas de agua superficial próximas a la desembocadura de los ríos que son parcialmente salinas como consecuencia de su proximidad a las aguas costeras, pero que reciben una notable influencia de flujos de agua dulce, están siendo objeto de numerosos estudios dirigidos a su rehabilitación y conservación. Consideradas hoy en día como valiosos hábitats, es necesario contar con las herramientas adecuadas para llevar a cabo su gestión correctamente. Una de las partes más importantes del estudio de estas áreas consiste en conocer su hidrodinámica, para lo cual cada vez está más extendido el uso de modelos numéricos. En este artículo se analiza las situaciones que pueden inducir flujo tridimensional en las aguas de transición y se hace una revisión de los modelos tridimensionales existentes actualmente para el estudio hidrodinámico de las mismas. Como resumen de esta revisión se elabora una tabla en la que se comparan los modelos atendiendo a su idoneidad para representar las características de estas masas de aguas.

**Palabras clave:** Modelo tridimensional, modelo numérico, aguas de transición, estuario, bajos marales.

## INTRODUCCIÓN

En los últimos años, las aguas de transición, definidas por la Directiva Marco del Agua 2000/60/CE como *masas de agua superficial próximas a la desembocadura de los ríos que son parcialmente salinas como consecuencia de su proximidad a las aguas costeras, pero que reciben una notable influencia de flujos de agua dulce*, han pasado de ser consideradas zonas insalubres a ser reconocidas como zonas que es necesario proteger (uno de los objetivos de la nueva Directiva Marco del Agua 2000/60/CE es establecer un marco para la protección de estas masas de agua). Los numerosos beneficios que aportan: hábitat tanto permanente como de paso de muchas especies, laminación de avenidas, valor paisajístico, entre otros, hacen que hoy en día sean objeto de numerosos estudios de recuperación y conservación. Por ejemplo, en el Norte de España existen estuarios y marismas de gran valor reconocido como las Marismas de Santoña

(Cantabria), la Ría de Urdaibai (País Vasco), ambas declaradas Reserva de la Biosfera, el Parque Natural de Oyambre (Cantabria), objeto de un programa de restauración, etc.

Habitualmente, los estudios para conocer las características hidrodinámicas de estas zonas, se realizan con modelos numéricos promediados en vertical, denominados modelos 2D o bidimensionales. La propagación de una onda larga como es la onda de marea o la onda de avenida fluvial, por un estuario somero, produce un flujo básicamente horizontal, por lo que la hipótesis de perfiles de velocidad uniformes se ajusta bastante bien a la realidad. Es por esto que, en la mayoría de los casos, estos modelos proporcionan una buena aproximación al problema. Sin embargo, existen situaciones en las que el flujo no se puede suponer bidimensional o que se necesita conocer la estructura vertical del mismo. En estos casos debe utilizarse un modelo tridimensional para realizar el estudio.

Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas. E.T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos. Universidad de Cantabria. Avda. de los Castros s/n. 39005 Santander. España E-mail: castanedos@unican.es

Artículo recibido el 4 de octubre de 2001, recibido en forma revisada el 20 de septiembre de 2002 y aceptado para su publicación el 7 de octubre de 2002. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo siguiendo lo indicado en las "Instrucciones para autores". En el caso de ser aceptadas, éstas serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores.

En el presente trabajo se analiza cuáles son las principales características de un estuario que pueden inducir flujo tridimensional. Así mismo se realiza un estudio comparativo entre distintos modelos tridimensionales existentes en la bibliografía sobre el tema, en función de su capacidad para representar correctamente la hidrodinámica de las aguas de transición. Finalmente se presentan unas conclusiones del estudio realizado.

## FLUJOS 3D EN LAS AGUAS DE TRANSICIÓN

### Bajos mareales y marismas

La tendencia a la colmatación de los estuarios unida a la presencia de la marea produce oscilaciones de la batimetría y la aparición de bajos mareales. Este fenómeno es más acusado en los estuarios del Norte de España debido a la gran amplitud de carrera de marea a la que están sometidos, la cual, en ocasiones, llega a alcanzar los 5.0 metros. En estas situaciones los bajos suponen una parte muy importante de la superficie total. Por ejemplo, en las Marismas de Santoña, de los 16,2 km<sup>2</sup> de superficie máxima actual en pleamar, el 30 % es submareal o permanentemente sumergido, y el 70 % corresponde al intermareal.

La morfología de estos estuarios requiere, para su equilibrio, la existencia de extensos bajos mareales como demostró Lomónaco (1999) y como puede apreciarse en la figura 1. Obsérvese como existe una canal profunda y grandes zonas intermareales a su alrededor. Es precisamente la conexión de estos bajos con zonas relativamente mucho más profundas, lo que hace que la propagación de la onda de marea por esta batimetría, con fuertes gra-



Figura 1. Marismas de Santoña (Cantabria)

dientes de profundidad, induzca un flujo con características tridimensionales.

### Incorporaciones transversales

Una configuración frecuente en estas masas de agua es la incorporación transversal de una ría a la canal principal. En la figura 2 se puede ver la desembocadura de la Bahía de Santander. En la imagen se aprecia la incorporación de la Ría de Cubas, a la izquierda de la foto, perpendicularmente al flujo principal de la marea. De nuevo se presenta un proceso en el que existe una fuerte variación de la profundidad entre los dos canales (p.e. en la Bahía de Santander la diferencia de profundidad es de aproximadamente 10 m) y que puede producir flujo tridimensional. En el croquis superpuesto en la esquina inferior derecha de la imagen se esquematiza las características del movimiento en un corte transversal en la desembocadura (línea discontinua).

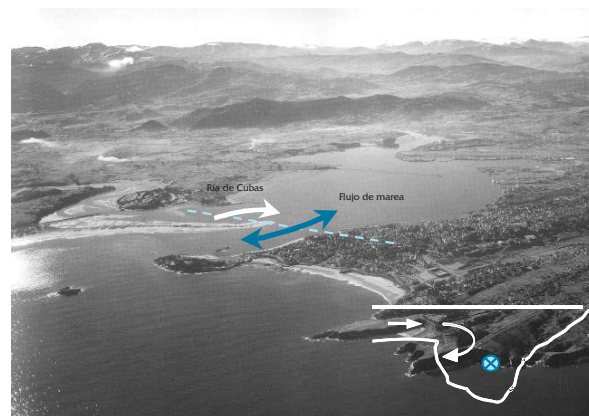


Figura 2. Bahía de Santander (Cantabria)

Como ejemplo, en la figura 3 se presentan perfiles de velocidad medidos en la zona de la desembocadura de la Ría de Cubas en la Bahía de Santander (aproximadamente en la línea de puntos señalada en la figura 2) en una campaña de campo efectuada entre los días 29 de Junio y 5 de Julio de 1988. En la figura 3  $v$  y  $w$  son las componentes de la velocidad horizontal en dirección Este y Norte, respectivamente, la vista del perfil se realiza desde el exterior de la Bahía hacia el interior, por lo tanto el primer gráfico a la izquierda corresponde a las medidas tomadas en la desembocadura de la Ría de Cubas. Nótese como, en este caso, existe una importante variación vertical de las velocidades horizontales, principalmente en el gráfico correspondiente a la canal principal (segundo por la izquierda) donde los efectos de la incorporación transversal de la Ría son más evidentes.

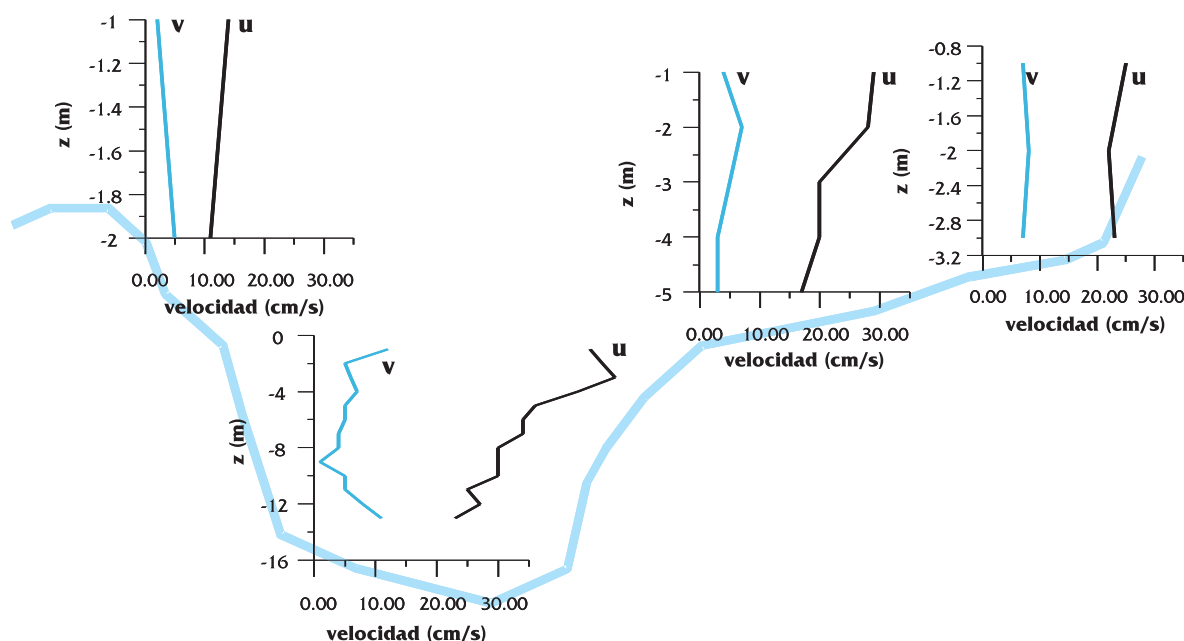


Figura 3. Perfiles verticales de velocidad medidos en la desembocadura de la Ría de Cubas en la Bahía de Santander (1988)

## Forzamiento baroclínico

Los efectos baroclínicos son otro factor que puede inducir flujo tridimensional en las aguas de transición. A modo de ejemplo se analiza la importancia de este fenómeno en las Marismas de Santoña. Para ello se utilizan medidas obtenidas en una campaña de campo realizada en 1997. Entre otros datos, en esta campaña se midieron perfiles de salinidad y temperatura en los puntos indicados en la figura 4. En la misma figura se representan estos perfiles para dos puntos, P1 y P4, en un instante de marea correspondiente a pleamar. Nótese que las diferencias de salinidad y temperatura entre los dos puntos son notables.

Considerando los términos de la ecuación de cantidad de movimiento correspondientes al gradiente horizontal de densidad,  $A = gH^2/(2\rho_0)\partial\rho_0/\partial x$ , y al gradiente de nivel,  $B = gH\partial\eta/\partial x$ , donde  $x$  se mide en la dirección Norte-Sur,  $g$  es la gravedad,  $H$  es el calado,  $\rho_0$  es la densidad media de la columna de agua y  $\eta$  es la elevación de la superficie libre respecto del nivel medio, si se calcula el cociente entre los dos términos  $A$  y  $B$ , tomando los datos entre un punto situado en Limpías (ver figura 4) cuyas características son las del río Asón, es decir, densidad de agua dulce,  $\rho_0 = 1.0 \text{ t/m}^3$ , y un punto en la desembocadura de la Ría como es el punto P4, de características indicadas en la figura 4, resulta  $A/B \approx 1$ . Es decir, en este caso, el término baroclínico es del mismo orden de magnitud que el correspondiente al gradiente de nivel, por lo que no debería despreciarse.

Análogamente, puede observarse en la misma figura que en el punto P1 las variaciones verticales de densidad,  $\partial\rho/\partial z$ , no son despreciables. De este modo se generan gradientes verticales de velocidad que pueden dar lugar a flujos opuestos en la superficie y en el fondo, como ocurre en la zona de Colindres, punto P2 (F.L.T.Q., 1995). En la figura 5 se representa un perfil de velocidades horizontales medido en el punto P2 durante la campaña de 1997. El instante de medida se corresponde con la bajamar. Nótese como el perfil de velocidades dista de ser uniforme como se asumiría en un modelo 2D.

De todo lo anterior se concluye que las aguas de transición poseen determinadas características y en ellas se producen fenómenos, que originan que el flujo tenga, al menos localmente, un marcado carácter tridimensional. Esto conlleva que, en aquellos estudios en los que sea necesario conocer la distribución vertical de las velocidades, por ejemplo para el cálculo del transporte de sedimentos, nutrientes o contaminantes, sería necesario la utilización de un modelo hidrodinámico tridimensional capaz de simular todos los procesos comentados en el apartado anterior.

## MODELOS 3D PARA AGUAS DE TRANSICIÓN

En las dos últimas décadas y paralelamente al rápido avance en el área de la informática, se ha

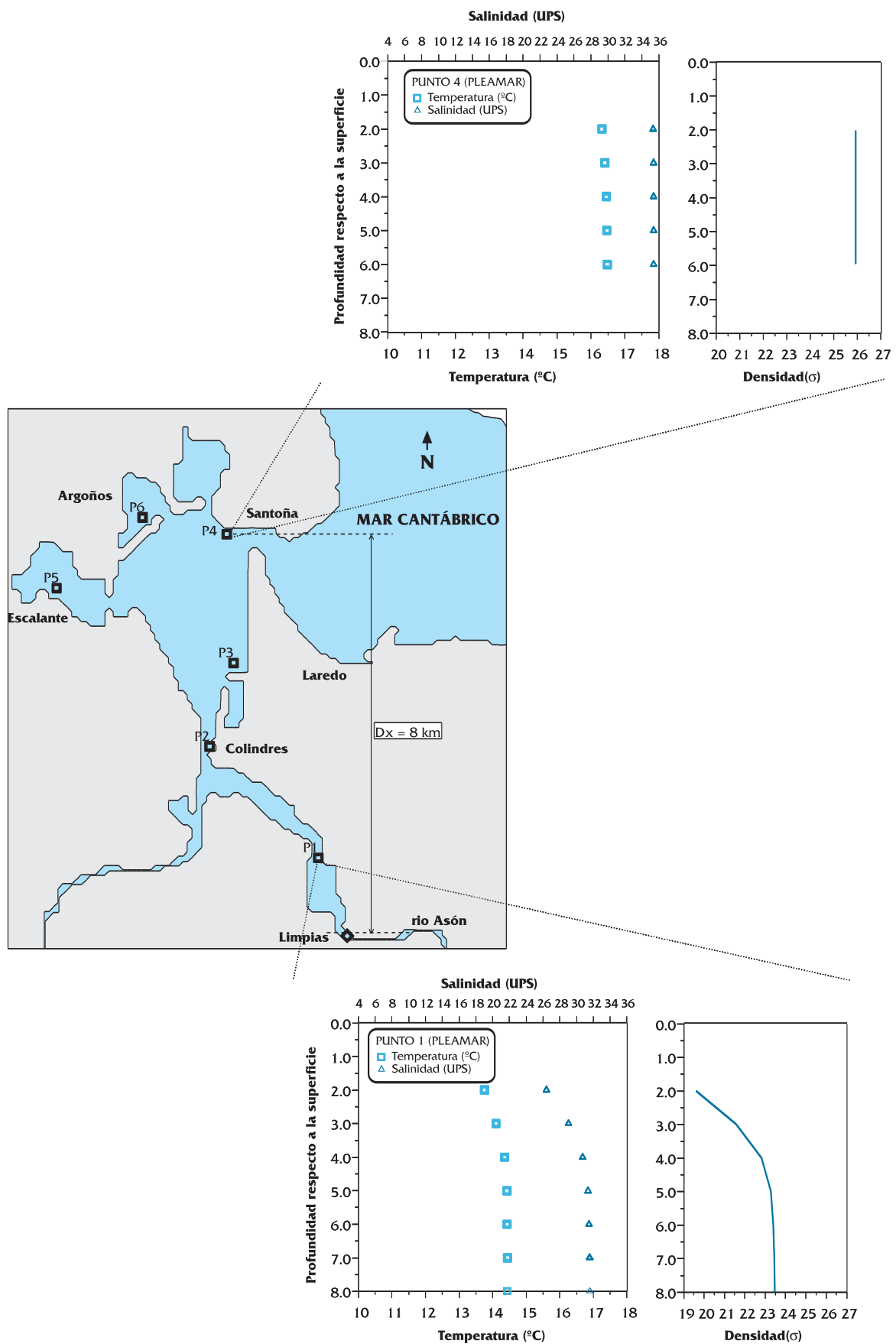


Figura 4. Puntos de medida en el interior de las marismas de Santoña

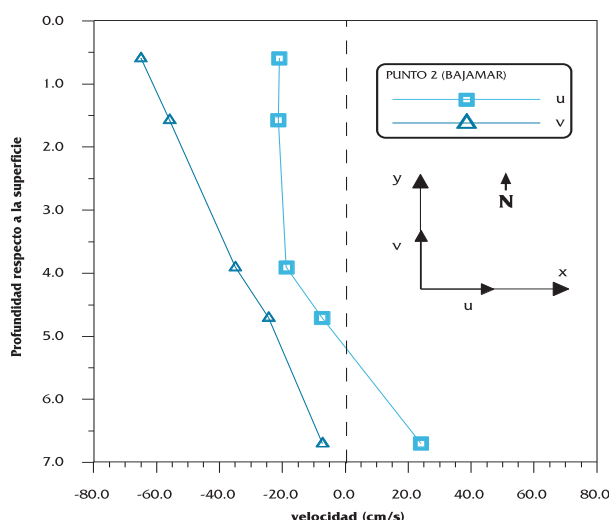


Figura 5. Perfiles de velocidad en el punto P2 (1997)

producido un notable incremento en el desarrollo y aplicación de modelos numéricos tridimensionales. Anteriormente, el uso de estos modelos resultaba prohibitivo debido a sus exigencias en cuanto a capacidad de memoria y tiempo de computación.

Debido a que los procesos hidrodinámicos llevan asociados un gran rango de escalas espaciales y temporales y que, como consecuencia de esto, resulta imposible diseñar un modelo numérico que resuelva de forma eficaz todos los fenómenos, existen numerosos modelos 3D diferenciados por las ecuaciones que resuelven y, por lo tanto, por su rango de aplicación y limitaciones.

Por motivos de exposición y al objeto de caracterizar brevemente los modelos que existen actualmente para el estudio de aguas de transición, se va a hacer una clasificación de los mismos atendiendo a los siguientes criterios:

1. Flujos planos y no planos;
2. Método de resolución de las ecuaciones tridimensionales;
3. Discretización de las ecuaciones;
4. Representación de la coordenada vertical;
5. Modelado de la turbulencia;
6. Tratamiento numérico de la inundación y el secado de las zonas intermareales.

## Flujos planos y no planos

La ecuación vertical del movimiento medio de un flujo turbulento puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\rho \overline{w'_t u'_t} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\rho \overline{w'_t v'_t} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\rho \overline{w'_t w'_t} \right] \quad (1)$$

donde  $P$  es la presión,  $u$ ,  $v$  y  $w$  son las componentes de la velocidad media de un flujo turbulento en las direcciones de los tres ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente,  $u'_t$ ,  $v'_t$  y  $w'_t$  son las componentes de la fluctuación turbulenta de la velocidad,  $\rho$  es la densidad del agua y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

Existen distintos modelos según el método adoptado para resolver la ecuación (1). La hipótesis fundamental que diferencia unos modelos de otros es el modelado de la presión en hidrostática o no hidrostática:

### - Modelos que utilizan la hipótesis de presión hidrostática

La mayoría de los modelos numéricos actualmente en uso, utilizan la hipótesis de presión hidrostática (modelo POM: Blumberg y Mellor, 1987; Jin y Kranenburg, 1993; modelo CH3D: Sheng, 1990; modelo ECOM: Casulli y Cheng, 1992). La utilización de esta hipótesis implica la aplicación del modelo en el estudio de flujos “planos” cuya circulación es predominantemente horizontal, lo que supone que las aceleraciones verticales son despreciables frente a la aceleración de la gravedad. Bajo esta hipótesis la ecuación vertical (1) se transforma en:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \quad (2)$$

que expresa una distribución hidrostática de presiones.

### - Modelos que utilizan la hipótesis de compresibilidad artificial

Existen modelos que resuelven las ecuaciones completas sin asumir presiones hidrostáticas pero, dado que la resolución de las ecuaciones de gobierno de un flujo turbulento incompresible es un problema mal condicionado, debido al desacoplamiento que existe entre la presión,  $P$ , y el campo de velocidades,  $(u, v, w)$ , estos modelos necesitan utilizar una aproximación consistente en introducir una compresibilidad artificial (Chorin, 1967). Para ello, se introduce un término en la ecuación de conservación de la masa, sustituyendo la derivada respec-



to al tiempo de la densidad por el término de presión en la ecuación de estado:

$$\frac{1}{\rho c_s^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

donde  $c_s$  es la velocidad del sonido en el agua. Uno de los modelos que utilizan esta aproximación es el desarrollado por el Danish Hydraulic Institute (1995).

#### - Modelos cuasi - hidrostáticos

Estos modelos para resolver las ecuaciones 3D dividen el problema en dos partes:

- (1) Resuelven la parte hidrostática de la solución utilizando como ecuación vertical la expresión (2).
- (2) Corrigen la solución hidrostática introduciendo la parte dinámica de la presión. Por lo tanto, utilizan como ecuación vertical, la expresión que resulta de eliminar de (1) la parte de presión hidrostática:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_d}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left[ -\rho \overline{w_t' u_t'} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left[ -\rho \overline{w_t' v_t'} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\rho \overline{w_t' w_t'} \right] \quad (4)$$

donde  $P_d$  es la presión dinámica. El modelo desarrollado por Casulli y Stelling (1998), pertenece a este tercer grupo, y está orientado al estudio de flujos cuasi - hidrostáticos, en los cuales la presión dinámica representa una pequeña perturbación.

Utilizando datos de laboratorio y de campañas de campo, Castanedo (2000), demostró que la hipótesis hidrostática es perfectamente válida para el estudio del flujo en aguas de transición. Por esta razón, cualquiera de los tres grupos de modelos mencionados en este apartado puede ser considerado correcto para el estudio de estas zonas.

#### Método de resolución de las ecuaciones tridimensionales

Actualmente, la resolución numérica de las ecuaciones de gobierno de un flujo turbulento tridimensional, queda representada principalmente por tres grupos de modelos:

- Modelos que resuelven las ecuaciones 3D en cada intervalo de tiempo (D.H.I., 1995; Casulli y

Cheng, 1992). El principal inconveniente de estos modelos es el gran tiempo de computación que necesitan.

- Modelos espectrales (Davies y Aldridge, 1993). Estos modelos resuelven, en primer lugar, las ecuaciones promediadas en vertical, y en un segundo paso calculan el perfil vertical de las velocidades por medio de un conjunto de coeficientes y funciones verticales. Como en el caso anterior, su principal problema reside en el aumento de tiempo de computación que supone que las ecuaciones de movimiento se conviertan en  $n$  - ecuaciones  $z$  - dependientes.

- Modelos *splitting*. La característica más relevante de esta técnica consiste en que divide el cálculo en dos partes: un módulo del programa, modo 2D, resuelve las ecuaciones promediadas en vertical, y calcula, por lo tanto las velocidades medias y la superficie libre, y otro módulo, modo 3D, calcula la estructura vertical de las variables. Una de las ventajas del método reside en que al eliminar de las ecuaciones 3D el cálculo de la superficie libre, la variación vertical de las variables puede calcularse con gran ahorro en tiempo de ordenador. La otra ventaja de esta técnica es que se basa en las características físicas de la circulación en aguas de transición, donde las variaciones en vertical de las variables se producen en una escala de tiempo mucho mayor que la variación de los valores medios, por lo que el modo 3D se puede ejecutar con un incremento de tiempo mayor que el del 2D, con el ahorro de tiempo que esto conlleva. El inconveniente que tiene el *splitting* de las ecuaciones, es que al dividir el problema en dos módulos que resuelven cada uno una parte de la solución, puede producirse un desacoplamiento debido al diferente error de truncamiento de los mismos. La forma de solucionar este problema se desarrolla con detalle en Castanedo (2000). Modelos que utilizan este método son entre otros: Blumberg y Mellor (1987), Sheng (1990), Jin y Kranenburg (1993) y Espino et al. (1998).

#### Discretización de las ecuaciones

Para resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales que gobiernan el movimiento de un flujo tridimensional, se necesita discretizar éstas. Para ello, existen numerosos métodos: diferencias finitas, elementos finitos, volumen de control, etc. Sin embargo, casi la totalidad de los modelos tridimensionales para zonas someras utilizan esquemas de resolución en diferencias finitas: Blumberg y

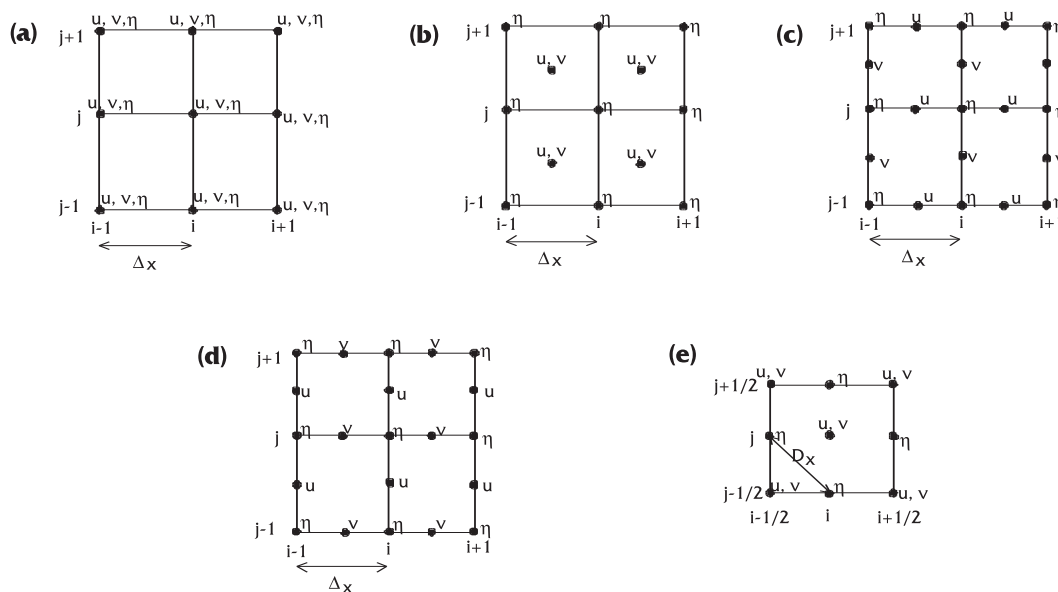


Figura 6. Mallas tipo Arakawa

Mellor (1987), Sheng (1990), Jin y Kranenburg (1993), D.H.I. (1995), Casulli y Cheng (1992).

Recientemente, el uso de esquemas en elementos finitos ha tenido cierto desarrollo, sin embargo, debido a la complicación de los códigos de los programas y al incremento de espacio en memoria y tiempo de computación que requieren respecto a las diferencias finitas, su uso está menos extendido (Kim y Lee, 1994). Además, para representar con elementos finitos la inundación y el secado de parte del dominio de cálculo, es necesario utilizar mallas que deben ajustarse y regenerarse en cada paso de tiempo, incrementando de forma importante el tiempo de computación. Modelos que utilizan esta técnica son, entre otros, los desarrollados por Luetlich y Westerink (1995) y D'Alpaos et al. (1996).

Dentro de las diferencias finitas, se pueden utilizar diferentes esquemas según se resuelvan las ecuaciones de forma explícita o implícita. Los métodos explícitos tienen que cumplir la condición de Courant, lo que reduce drásticamente el incremento de tiempo del modelo. La alternativa de uso más extendido es el esquema implícito denominado ADI (Leendertse, 1970). En este esquema, en cada paso de tiempo se calculan las derivadas a lo largo de las tres coordenadas sucesivamente (MIKE 3, 1995). Algunos autores han analizado los problemas que surgen al aplicar la técnica ADI con grandes números de Courant (efecto ADI). En el trabajo de Stelling et al., (1986) se explica que este efec-

to, que puede tener influencia en los perfiles de velocidad y en la velocidad de propagación numérica de la onda de marea, es inherente a toda integración numérica mediante un método como el ADI y que a pesar de que es incondicionalmente estable, para evitar errores en los resultados, debe utilizarse un número de Courant adaptado a las características geométricas del caso que se estudie. Actualmente, existe cierta tendencia a sustituir el método ADI por métodos de resolución directa de la matriz del sistema. Estos métodos aunque suponen mayor tiempo de computación evitan los problemas mencionados anteriormente.

Otra característica que diferencia a un modelo en diferencias finitas de otro, es la disposición, en la malla de cálculo, de las variables de cálculo. En la figura 6 se muestra las mallas más utilizadas por los modelos numéricos de este tipo. Estas mallas fueron propuestas por Arakawa y su origen proviene de la aplicación en modelos meteorológicos (Kowalik y Murty, 1993).

La mayoría de los modelos revisados utilizan la malla tipo C, en la cual, la profundidad se define en las caras de las celdas. Las principales ventajas de esta malla son que no induce soluciones espúreas y minimiza el esfuerzo computacional (Balzano, 1998).

La elección del esquema numérico para ser utilizado en un modelo es un tema importante en cuanto a eficiencia de cálculo: sencillez de las ex-

presiones, memoria utilizada, rapidez de cálculo, etc. Sin embargo, en relación a los resultados no es un tema decisivo y cualquiera de los mencionados anteriormente puede ser válido para representar correctamente el flujo en las aguas de transición.

### Representación de la coordenada vertical

Respecto al modelado de la coordenada vertical existen dos grandes grupos de modelos para el estudio de zonas someras: aquéllos que utilizan coordenadas cartesianas y los que utilizan la coordenada sigma  $\sigma=(z-\eta)/H$ . En la figura 7 se representan los dos sistemas.

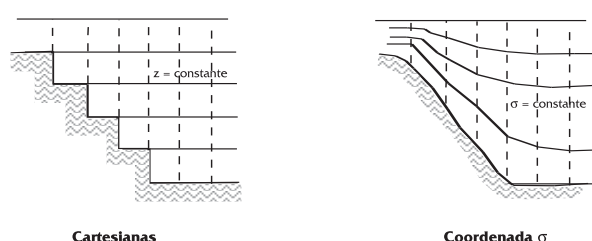


Figura 7. Tipos de malla vertical

El primer tipo es el denominado coordenada  $z$  o cartesianas, en el cual el dominio vertical se divide en niveles de  $\Delta z$  constante. Esta coordenada ha sido utilizada, entre otros por Leendertse y Liu (1975) y Lin y Falconer (1997). Este tipo de malla tiene dos problemas importantes: (1) a menos que se use un gran número de puntos en vertical las zonas poco profundas quedan pobremente representadas, y (2) la superficie libre es un contorno móvil cuya representación presenta dificultades en un esquema tan rígido.

La otra aproximación es la coordenada  $\sigma$ , en la cual las coordenadas rectilíneas  $(x, y, z)$  se transforman en coordenadas sigma  $(x^*, y^*, \sigma)$  de acuerdo con la transformación:  $x^* = x$ ;  $y^* = y$  y  $\sigma = (z - \eta)/H$ , donde  $H$  es el calado y  $\eta$  es la altura de la superficie libre. Esta transformación tiene una larga historia en modelación meteorológica (Phillips, 1957) y en el presente es una técnica de uso muy extendido en modelos 3D de circulación costera, como por ejemplo, Blumberg et al. (1993) y Sheng (1990). Las principales ventajas de esta representación son: (1) las superficies  $\sigma$  se adaptan a la superficie libre y a la batimetría y, (2) se consigue igual número de capas en zonas someras que en zonas profundas. Sin embargo, numerosos estudios han detectado problemas en el uso de esta transformación en zonas con fuertes gradientes de profundidad, de los cuales los más importantes son:

1. Errores de truncamiento producidos al calcular la presión baroclínica, que inducen movimientos no reales debidos a densidad (Haney, 1991; Beckman y Haidvogel, 1993).
2. Debido a estos errores de truncamiento, los términos que involucran gradientes horizontales pueden llegar a ser muy grandes en presencias de fuertes gradientes de profundidad (Fortunato y Baptista, 1994).

Para evitar estos problemas, Haney (1991) propuso una condición denominada “consistencia hidrostática” asociada a la coordenada  $\sigma$ :

$$\left| \frac{\sigma}{H} \frac{\partial H}{\partial x} \right| \Delta x < \Delta z \quad (5)$$

Esta inecuación requiere un  $\Delta x$  lo suficientemente pequeño para un incremento dado en vertical. De esta forma se garantiza que la superficie  $\sigma$  inmediatamente debajo / encima de una superficie dada permanece debajo / encima de ésta, en una distancia horizontal igual a  $\Delta x$ . La condición anterior resulta muy restrictiva y casi imposible de cumplir en zonas como las aguas de transición donde existen bajos mareales en contacto con canales mucho más profundos y zonas que llegan a secarse. Por lo tanto, para evitar estos problemas y la restricción asociada a los mismos, han surgido algunas variaciones de la transformación  $\sigma$ :

Mellor y Blumberg (1985) modificaron los términos de difusión horizontal para que fueran válidos tanto en pendientes fuertes como suaves.

Gerdes (1993) propuso una aproximación en la que se utiliza la coordenada  $z$  por encima de una profundidad dada,  $z_c$ , mientras que la coordenada  $\sigma$  se aplica en el intervalo entre  $z_c$  y el fondo. Esta transformación está pensada para su aplicación en zonas profundas con fuerte estratificación en la superficie. Al aplicar la coordenada  $z$  en esa zona se evitan los errores de truncamiento en los gradientes de presión. Sin embargo, no resulta útil para su aplicación en los estuarios donde el problema reside en los fuertes gradientes de profundidad.

Sheng et al. (1990) resuelven el problema utilizando la coordenada  $\sigma$ , pero calculando los gradientes horizontales en planos de  $z$  constante.

Fortunato y Baptista (1994) proponen unas coordenadas denominadas LSC (*localized sigma coordinates*) en las cuales, los gradientes horizon-



tales se resuelven en coordenadas cartesianas, al igual que Sheng et al. (1990), pero a diferencia de éstos cada vertical se discretiza de forma independiente, lo cual permite más flexibilidad al sistema. Sin embargo, los autores señalan que el algoritmo que utilizan es sólo condicionalmente consistente y presenta inestabilidades.

Después de esta breve revisión de las ventajas e inconvenientes de las dos representaciones verticales,  $z$  y  $\sigma$ , se puede señalar que, para modelar numéricamente el flujo en aguas de transición, la coordenada sigma presenta numerosas ventajas, siendo las siguientes las más importantes:

- Adaptación a la superficie libre. Esta característica adquiere mucha importancia cuando se tiene que modelar la inundación y el secado de las zonas intermareales. En una coordenada  $z$ , habría que aplicar un algoritmo que asignara un estado (seca o con agua) a cada celda de una columna vertical en cada incremento de tiempo. En cambio en la coordenada  $\sigma$ , este problema no aparece ya que el  $\Delta z$  se adapta a la altura de agua de cada columna en cada paso de tiempo.

- Como ya se ha mencionado, en las aguas de transición existen fuertes gradientes de profundidad. Se ha comprobado que es frecuente tener zonas profundas conectadas con otras que incluso pueden secarse a lo largo de la simulación. Con la coordenada  $\sigma$  se consigue tener igual número de celdas verticales en todas las zonas. Esto no sería posible con la coordenada  $z$ , debido a la rigidez que supone utilizar un  $\Delta z$  constante.

Sin embargo, el problema que presenta la coordenada  $\sigma$  al calcular los gradientes horizontales en zonas con fuertes cambios de profundidad, la hace inadecuada para su utilización en estas masas de agua.

Para evitar este problema y de acuerdo con los trabajos de Castanedo (2000) los autores proponen dos opciones para la representación vertical en aguas de transición: o bien utilizar las ecuaciones transformadas a coordenadas sigma y calcular los gradientes horizontales en planos de  $z$  constante, o bien, transformar únicamente el eje vertical  $z$  a coordenadas sigma y calcular el resto en cartesianas. Ambos métodos aprovechan las ventajas ya mencionadas de la coordenada sigma y soslayan su principal problema.

## Modelado de la turbulencia

Las ecuaciones tridimensionales que gobiernan el movimiento medio de un flujo turbulento para un fluido incompresible (Kundu, 1990) no constituyen un sistema cerrado, ya que para su resolución se necesita calcular el valor de las tensiones de Reynolds. Los modelos o expresiones que calculan estas tensiones se denominan modelos o ecuaciones de cierre, lo cuales se pueden agrupar en dos categorías: aquéllos que emplean el concepto de viscosidad de remolino (en adelante *eddy viscosity*) y los que no lo utilizan.

El concepto de *eddy viscosity*, (Boussinesq, 1877) asume que, en analogía con las tensiones viscosas en flujo laminar, las tensiones turbulentas son proporcionales al gradiente de la velocidad media. El factor de proporcionalidad o *eddy viscosity* se convierte, por tanto, en la incógnita a resolver y ha dado lugar a numerosos tipos de modelos. Éstos, a su vez, pueden clasificarse según diferentes criterios. Un esquema de clasificación adoptado normalmente consiste en agrupar los modelos según el número de ecuaciones de transporte utilizadas para las variables que describen la turbulencia: modelos de cero (*eddy constante*, modelos de mezcla), de una y de dos ecuaciones ( $k - \epsilon$  (Rodi, 1993),  $k - \omega$  (Wilcox, 1988)). Otra forma de clasificar los modelos de turbulencia consiste en agruparlos en algebraicos o diferenciales. En los primeros, las ecuaciones de transporte diferenciales se simplifican de tal forma que se reducen a expresiones algebraicas manteniendo sus características básicas.

El segundo grupo de modelos de turbulencia no utiliza el *eddy viscosity*, resuelve directamente las ecuaciones de transporte para las tensiones de Reynolds. En la actualidad estos modelos están en fase de desarrollo y no han sido suficientemente validados. Una detallada descripción de los distintos modelos de turbulencia y su aplicación en hidráulica se puede encontrar en Rodi (1993).

Todos los modelos 3D de uso más extendido actualmente utilizan el concepto de *eddy viscosity* para calcular las tensiones de Reynolds.

## Turbulencia horizontal

Normalmente, la turbulencia horizontal se resuelve de distinta forma que la vertical, debido a la diferente escala espacial de cada proceso y a que constituye un factor empírico de ajuste del modelo numérico. En muchos modelos para aguas poco

profundas, donde las velocidades de las corrientes de marea son fuertes (del orden de 1 m/s) y la fricción con el fondo es muy importante, si la malla horizontal es fina, no se incluye la difusión horizontal (Davies y Aldridge, 1993). Sin embargo, si existen fuertes gradientes de profundidad es necesario incluir este término (Davies et al., 1997).

En numerosos modelos se utiliza un *eddy viscosity* horizontal constante, cuya magnitud depende de la resolución de la malla de cálculo y del incremento de tiempo del modelo. Por ejemplo Madsen et al., (1988) proponen la siguiente expresión:

$$\varepsilon_h = k_1 \frac{\Delta x^2}{\Delta t} \quad k_1 \approx 0.05 \quad (6)$$

Modelos que emplean *eddy* horizontal constante son los desarrollados por (Blumberg y Mellor, 1987; Casulli y Cheng, 1992; Sheng, 1990).

Para *eddy viscosity* horizontal variable, las opciones más comunes son expresiones del tipo:

$$\varepsilon_h = k_2 \Delta x u \quad (7)$$

donde  $u$  es una velocidad característica y  $k_2 \approx 0.15$  (Madsen et al., 1988), o también una aproximación de uso frecuente, es la propuesta por Smagorinsky (1963), en la que el *eddy* horizontal depende de los gradientes de las velocidades y de una longitud de mezcla,  $l$ :

$$\varepsilon_h = l (S_{ij} S_{ji})^{1/2} \quad (8)$$

$$\text{donde } S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

$l = C_s \Delta x$  y  $C_s$  es una constante empírica que toma valores distintos según se utilice en un modelo 3D ( $C_s \approx 0.1825$ ) o 2D ( $C_s \approx 0.4 - 0.8$ ). Un desarrollo detallado de esta formulación puede encontrarse en Madsen et al. (1988). Modelos que emplean esta expresión, son entre otros los desarrollados por (Mellor, 1993; MIKE 3, 1995).

En los modelos 3D que resuelven las ecuaciones promediadas en vertical, como aquéllos que utilizan la técnica *splitting* descrita anteriormente, o los modelos espectrales que como se ha visto, también parten de las ecuaciones 2D, normalmente se representa la promediación de la componente vertical de las tensiones de Reynolds como tensiones tangenciales en el fondo y en la superficie libre, que son a su vez, condiciones de contorno de las ecuaciones 3D. Por ejemplo en el eje  $x$  se tendría:

$$\int_{-h}^{\eta} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{u'_t w'_t}) \right] dz = \tau_{xz(\eta)} - \tau_{xz(-h)} \quad (9)$$

Para promediar la componente horizontal de las tensiones de Reynolds, existen numerosas propuestas en la literatura sobre el tema. La mayoría de los autores suponen despreciables las variaciones de la profundidad (p.e. Blumberg y Mellor, 1987) y utilizan *eddy viscosity* horizontal constante, hipótesis que, como se puede deducir, no son válidas para estudiar zonas como los estuarios. En Castanedo (2000) se realiza un análisis detallado de las expresiones de uso más extendido para representar las tensiones de Reynolds promediadas y se propone una expresión de la turbulencia horizontal para resolver correctamente el flujo en las aguas de transición.

### Turbulencia vertical

Existen en la bibliografía diversas opciones para modelar la turbulencia vertical. La elección de una teoría determinada dependerá del tipo de flujo que se vaya a considerar (marea, chorros, plumas,...).

Para flujos donde los fenómenos de transporte y generación / disipación de la turbulencia sean importantes, por ejemplo en zonas de rotura de una termoclina, casos en los que se produzca cambios bruscos del flujo o en flujos sometidos a grandes curvaturas, es necesario utilizar expresiones que puedan simular la evolución de las variables turbulentas. Uno de los modelos más conocidos es el denominado  $k - \varepsilon$  (Rodi, 1993), en el que se resuelven dos ecuaciones diferenciales, una para la energía cinética turbulenta,  $k$ , y otra para la tasa de disipación de esta energía turbulenta,  $\varepsilon$ . Mellor y Yamada (1982) desarrollaron un modelo de dos ecuaciones, basado en el  $k - \varepsilon$ , denominado modelo  $q^2/2 - l$ , donde  $q^2/2$  es la energía cinética turbulenta y  $l$  una escala de longitud. Asimismo, Wilcox (1988) desarrolló un modelo que implicaba la solución de dos ecuaciones de transporte, una para la energía cinética turbulenta,  $k$ , y otra para la frecuencia turbulenta,  $\omega$ . Modelos tridimensionales que utilizan este tipo de expresiones son entre otros: Blumberg y Mellor (1987) y Davies y Xing (1995).

En la propagación de la onda de marea por aguas de transición, el principal factor que gobierna el movimiento del flujo es el rozamiento por fondo. Esto produce que la turbulencia vertical esté muy influenciada por la capa límite del fondo y que sea un proceso perfectamente establecido a lo largo

de toda la columna de agua. En estos casos, para movimientos “desarrollados”, la modelación de la turbulencia se puede hacer suponiendo que existe equilibrio local. Las diferentes opciones que existen para representar la turbulencia vertical con esta hipótesis son:

- *Eddy* vertical constante. La parametrización más simple del *eddy viscosity* vertical es asumir que tiene un valor constante. Sin embargo, de esta forma no es posible representar la capa límite del fondo, por lo que en estos casos sería apropiado utilizar una condición del fondo de deslizamiento (Grenier y Luetlich, 1996).

- Expresiones análogas a las derivadas por Elder, en las que el *eddy* vertical es constante en  $z$ , pero no en horizontal:

$$\varepsilon_z = A_1 h |u| \quad (10)$$

$$\varepsilon_z = A_2 |u|^2 \quad (11)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son parámetros de ajuste del modelo y  $h$  y  $u$ , son la profundidad y la velocidad del punto.

- Expresión del *eddy* vertical basada en ensayos de laboratorio, datos reales y estudios teóricos, por los que se sabe que en un flujo turbulento desarrollado el *eddy* en el fondo cumple:

$$\varepsilon_z = K u_* z \quad (12)$$

donde  $K$ , es la constante de von Kármán,  $u_*$  es la velocidad de fricción en el fondo y  $z$  es la altura desde el fondo. Numerosos modelos utilizan expresiones de este tipo, por ejemplo: Jin y Kranenburg (1993), Koutitas (1987), Grenier y Luetlich (1996) y Madsen et al. (1988).

- Modelos de longitud de mezcla (Rodi, 1993). Estos modelos calculan el *eddy* en función de una longitud de mezcla y del gradiente vertical del flujo medio. Lin y Falconer (1997) proponen la siguiente expresión:

$$\varepsilon_z = l \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (13)$$

donde:

$l = Kz$  para  $Kz \leq 0.1 H$

$l = 0.1 H$  para  $Kz > 0.1 H$

$K$  es la constante de von Kármán.

Para representar correctamente la turbulencia vertical en las aguas de transición, las expresiones (12) y (13) pueden ser consideradas como las más adecuadas si se asume equilibrio local. Por el contrario, si en la zona de estudio se produce rotura del oleaje, rotura de termoclina, o cualquier fenómeno que origine transporte, generación y disipación de la turbulencia el modelo de cierre adecuado sería uno del tipo  $k - \varepsilon$  o similar.

## Tratamiento numérico de la inundación y el secado de las zonas intermareales

La marea es un factor que determina en gran medida el flujo en las aguas de transición. En particular, en el Norte de España es un fenómeno muy importante, pudiéndose alcanzar en mareas vivas, carreras de hasta cinco metros. Por este motivo, se necesita desarrollar un modelo numérico que, para poder ser utilizado en aplicaciones prácticas en ingeniería, tenga en cuenta estas condiciones. Sin embargo, la mayoría de los modelos 3D actuales no son capaces de simular situaciones en las que grandes áreas de un estuario se secan e inundan durante un ciclo de marea (Lin y Falconer, 1997).

La representación numérica de este fenómeno se aborda, principalmente, de dos formas distintas (Shaoling Hu y Kot, 1994): (1) algoritmos que varían el dominio de cálculo en cada paso de tiempo y (2) algoritmos que mantienen constante el dominio, estableciendo como mínimo nivel, una delgada película de agua.

El primer sistema tiene la ventaja de poder definir, en cada intervalo de tiempo, la malla de cálculo, siendo necesario establecer unas expresiones y criterios para secar o inundar una celda.

La ventaja de la segunda técnica radica en que el esquema numérico es continuo, aunque tiene el inconveniente de que no cumple la ecuación de continuidad, ya que se seca una celda cuando aún tiene agua (*cell retention volume*) y de que los términos no lineales dan errores numéricos (imposición brusca de condiciones de contorno).

En general, los modelos tridimensionales para la propagación de ondas largas en aguas de transición utilizan el primer esquema (variación en el tiempo del dominio de cálculo, *moving boundary*). Balzano (1998) evalúa diferentes algoritmos de inundación-secado, existentes en el estado del arte, y concluye que el criterio que se utilice para definir el estado de una celda (seca o inundada) tiene apre-

ciables diferencias en los resultados. Cada algoritmo analizado por Balzano, propone un criterio en función de la profundidad en las cuatro caras de una celda, ya que, al usar todos ellos una malla tipo Arakawa – C, no disponen de información acerca de la profundidad en el centro de la celda. Esto produce que los esquemas no sean conservativos y que tengan ruidos que Balzano denomina “numéricos”.

Haciendo un análisis teórico del movimiento transitorio que se genera por el cambio brusco de las condiciones de contorno cuando se inunda o se seca una celda del dominio de cálculo, se llega a la conclusión de que las inestabilidades catalogadas por otros autores como ruidos numéricos son la respuesta física del dominio. Castanedo (2000) realiza un estudio detallado de este problema y propone un esquema numérico para resolverlo.

## TABLA RESUMEN

En la Tabla 1 se presentan las características más importantes de varios modelos 3D para zonas someras. Los modelos escogidos son representantes de las distintas tendencias que existen actualmente sobre modelación tridimensional. Observando la tabla, se obtienen las siguientes conclusiones:

- De los once modelos analizados sólo dos especifican cómo resuelven la inundación - secado de las zonas someras.
- Sólo uno de los modelos, plantea un modelo de turbulencia válido para su aplicación en zonas de transición. Sin embargo, utiliza coordenadas cartesianas, sistema de representación no adecuado para estas zonas, como se ha mencionado anteriormente.
- Ninguno de los modelos analizados es adecuado para el estudio de zonas con fuertes gradientes de profundidad y con extensas áreas que se secan.

## CONCLUSIONES

De la revisión realizada durante este trabajo sobre modelos 3D para el estudio de aguas de transición, surgen las siguientes conclusiones:

- Si bien existen algunos modelos tridimensionales propuestos para zonas someras, no se encuentra en la literatura sobre el tema modelos es-

pecíficos para el estudio de estuarios en los cuales la carrera de marea es el factor predominante y, por lo tanto, grandes áreas se encuentran sometidas a la inundación y secado durante un ciclo de marea y existen fuertes gradientes de profundidad.

- En la modelación numérica del flujo en aguas de transición tiene gran importancia la correcta representación de la interacción de la batimetría con el flujo, por lo que la representación de la coordenada vertical requiere especial atención. La utilización de la coordenada  $s$  en zonas someras tiene importantes ventajas, pero es inadecuada para modelar zonas con fuertes gradientes de profundidad.
- Existen en la literatura numerosas formas de modelar la turbulencia, tanto horizontal como vertical. Muchas de esas formulaciones asumen hipótesis que no son válidas para el estudio de zonas con variaciones importantes de la profundidad.
- Los algoritmos de inundación-secado existentes en el estado del arte no cumplen las ecuaciones de gobierno, ya que no son conservativos (retention volume) y tampoco cumplen la ecuación de cantidad de movimiento. Esto es debido a la defectuosa representación de las condiciones de contorno en las celdas que se inundan o se secan, lo que produce generación de ondas transitorias tratadas usualmente como ruidos numéricos.

Tabla 1. Modelos 3D para aguas de transición

## SÍMBOLOS

Modelos 3D para aguas de transición											
Características de los modelos	Blumberg y Mellor (1987); Mellor (1993) "POM"	Davies y Aldridge (1993)	Danish Hydraulic Institute (1995) "MIKE 3"	Sheng (1990) "CH3D"	Casulli y Cheng (1992) "ECOM"	Jin y Kranenburg (1993)	Casulli y Stelling (1998)	Hamrick (1992) "EFD"	Muin y Spaulding (1997)	Kim y Lee (1994)	D'Alpaos et al. (1996)
Agentes de movimiento	Viento, marea astronómica, densidad, descarga fluvial, Coriolis	Viento, marea, Coriolis	Viento, marea astronómica, densidad, descarga fluvial y vertidos	Viento, marea astronómica, densidad, descarga fluvial, Coriolis	Viento, marea astronómica, densidad, descarga fluvial, Coriolis	Viento, marea astronómica, densidad, descarga fluvial, Coriolis	Quasi-Hidrostática, Boussinesq, Eddy viscosity	Hidrostática, Boussinesq, Eddy viscosity	Viento, marea astronómica, densidad, descarga fluvial, Coriolis	Viento, marea astronómica, densidad, descarga fluvial, Coriolis	Viento, marea astronómica, densidad, descarga fluvial
Hipótesis	Hidrostática, Boussinesq, Eddy viscosity	Hidrostática, Boussinesq, Eddy viscosity	Compresibilidad artificial, Boussinesq, Eddy viscosity	Hidrostática, Boussinesq, Eddy viscosity	Hidrostática, Boussinesq, Eddy viscosity	Hidrostática, Boussinesq, Eddy viscosity	Splitting: parte hidrost. + parte dinámica	Splitting: 2D + 3D	Splitting: 2D + 3D	Splitting: 2D + 3D	Hidrostática, Boussinesq, Eddy viscosity
Método de resolución	Splitting: 2D + 3D	Espectral	3D completo	Splitting: 2D + 3D	3D completo pero en zonas someras sólo calcula en 2D	Splitting: 2D + 3D	Diferencias finitas: modo hidrost. semimplícito, modo dinámico: método del grad. conjugado	Diferencias finitas: modo 2D implícito, modo 3D con difusión vertical implícita	Diferencias finitas: modo 2D semimplícito, modo 3D con difusión vertical implícita	3D completo	3D completo
Discretización de las ecuaciones	Diferencias finitas: modo 2D explícito, modo 3D con difusión vertical implícita y método de eliminación de Gauss	Diferencias finitas en 2D Aproximación espectral en 3D (método Galerkin)	Diferencias finitas: método ADI de doble barrido	Diferencias finitas: modo 2D implícito, modo 3D con difusión vertical implícita	Diferencias finitas: método semimplícito	Diferencias finitas: modo 2D esquema ADI, modo 3D difusión vertical implícita (Crank-Nicholson)	Malla Arakawa-C	Malla Arakawa-C	Malla Arakawa-C	Diferencias finitas: método ADI de doble barrido	Elementos finitos
Coordenada vertical	Malla Arakawa-C	Malla Arakawa-C	Malla Arakawa C	Coordenada $\sigma$ con gradientes horiz. en z	Malla Arakawa-C	Coordenada z	Coordenada z	Coordenada $\sigma$	Coordenada $\sigma$	Coordenada z	Coordenada z
Ecuaciones de cierre	H: Eddy viscosity constante / Smagorinsky V: Modelo $q^2/2-l$ (Mellor y Yamada, 1982) Dominio variable. Profundidad límite sin modificación de la condición de contorno	H: No lo considera V: Eddy viscosity en función del flujo	-Eddy cte -Smagorinsky -Modelo k -Modelo k- $\epsilon$	H: Eddy viscosity constante V: Formulación semiempírica	H: Eddy viscosity constante V: Eddy viscosity en función del flujo Dominio variable. Profundidad límite sin modificación de la condición de contorno	H: Eddy viscosity constante V: Eddy viscosity parabólico o Modelo k- $\epsilon$	H: Eddy viscosity constante V: No especificado	H: No lo considera V: Modelo $q^2/2-l$ (Mellor y Yamada, 1982)	H: No lo considera V: Modelo de una ec. para la energía cinét. turb. y ec. empírica para la long. de mezcla	H: No especificado V: Eddy viscosity en función del flujo	H: No especificado V: Eddy viscosity en función del flujo
Método de Inundación - Secado	No especificado	No especificado	No especificado	No especificado	No especificado	No especificado	No especificado	No especificado	No especificado	No especificado	No especificado
Observaciones	- Esquema de inundación-secado no conservativo - Coordenada $\sigma$ : no válido para $\partial H/\partial x \gg y/o H \ll$ - Modelo de turbulencia no válido	- Coordenada $\sigma$ : no válido para $\partial H/\partial x \gg y/o H \ll$ - Modelo de turbulencia no válido	- Coordenadas cartesianas: poca resolución en zonas someras; superficie libre es un contorno móvil - Modelo de turbulencia válido	- Modelo de turbulencia no válido - Esquema de inundación-secado no conservativo - Coordenadas cartesianas: poca resolución en zonas someras; superficie libre es un contorno móvil	- Esquema de inundación-secado no conservativo - Coordenadas cartesianas: poca resolución en zonas someras; superficie libre es un contorno móvil	- Coordenadas cartesianas: poca resolución en zonas someras; superficie libre es un contorno móvil - Modelo de turbulencia no válido	- Coordenadas cartesianas: poca resolución en zonas someras; superficie libre es un contorno móvil - Modelo de turbulencia no válido	- Coordenada $\sigma$ : no válido para $\partial H/\partial x \gg y/o H \ll$ - Modelo de turbulencia no válido (No considera la difusión horizontal)	- Coordenada $\sigma$ : no válido para $\partial H/\partial x \gg y/o H \ll$ - Modelo de turbulencia no válido (No considera la difusión horizontal)	- Coordenadas cartesianas: poca resolución en zonas someras; superficie libre es un contorno móvil - Modelo de turbulencia no válido (No considera la difusión horizontal)	- Coordenadas cartesianas: poca resolución en zonas someras; superficie libre es un contorno móvil - Modelo de turbulencia no válido (No considera la difusión horizontal)



	componentes de la velocidad en las tres direcciones x, y, z
$u, v, w$	componentes de la fluctuación turbulenta de la velocidad en las tres direcciones x, y, z
$u_i', v_i', w_i'$	densidad total del agua
$\rho$	densidad media del agua
$\rho_0$	altura de la superficie libre respecto del Nivel Medio del Mar
$\eta$	aceleración de la gravedad
$g$	viscosidad de remolino horizontal
$\varepsilon_j$	viscosidad de remolino vertical
$\varepsilon_z$	presión
$P$	presión dinámica
$P_d$	altura de agua en el punto ( $H = h + \eta$ )
$H$	profundidad de un punto respecto del Nivel Medio del Mar
$h$	constante universal de von Kármán
$K$	velocidad de fricción
$u^*$	coordenada vertical
$\sigma$	incremento de tiempo del modelo numérico
$\Delta t$	longitud de una celda en la dirección x
$\Delta x$	longitud de una celda en la dirección z
$\Delta z$	

## REFERENCIAS

- BALZANO, A. (1998). "Evaluation of methods for numerical simulation of wetting and drying in shallow water flow models". *Coastal Engineering*. Vol. 34, pp. 83-107.
- BECKMANN, A. y HAIDVOGEL, B.D. (1993). "Numerical simulation of flow around a tall isolated seamount. Part I: Problem formulation and model accuracy". *Journal of Physical Oceanography*, Vol. 23, pp. 1736 – 1753.
- BLUMBERG, A.F. y MELLOR, G.L. (1987). "A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model. Three-dimensional coastal ocean models", N.S. Heps, ed., American Geophysical Union, Washington, D.C.
- BLUMBERG, A. F., SIGNELL, R. y JENTER, H.L. (1993). "Modeling transport processes in the coastal ocean". *J. Marine Env. Engg.* Vol. 1, pp. 31-52.
- BOUSSINESQ, J. (1877). "Essai sur la théorie des eaux courants". *Mém. Prés. Acad. Sci. Paris (Ser. 2)*. No. 23, pp. 1-680.
- CASTANEDO, S. (2000). "Desarrollo de un modelo hidrodinámico tridimensional para el estudio de la propagación de ondas largas en estuarios y zonas someras". Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria. 283 pp.
- CASULLI, V. y STELLING, G.S. (1998). "Numerical simulation of 3D quasi-hydrostatic, free-surface flows". *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 124, N.º 7, pp. 678-686.
- CASULLI, V. y CHENG, R.T. (1992). "Semi-implicit finite difference methods for three-dimensional shallow water flow". *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 15, pp. 629-648.
- CHORIN, A.J. (1967). "A numerical method for solving incompressible viscous flow problems". *Journal of Computational Physics*, Vol. 2, pp. 12-26.
- D'ALPAOS, L., DEFINA, A. y MATTICCHIO, B. (1996). "A multi-layer model for shallow water flows and density currents applied to a lagoon in the Po river delta". *Computer Method Water Resources*. 11 TH, Vol. 11, pp. 391-399.
- DAVIES, A.M., JONES, J.E. y XING, J. (1997). "Review of recent developments in tidal hydrodynamic modeling. I: Spectral models". *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 123, N.º 4, pp. 278-292.
- DAVIES, A.M. y XING, J. (1995). "An intercomparison and validation of a range of turbulence closure schemes used in three dimensional tidal models". *Quantitative skill assessment for coastal ocean models*. D.R. Lynch y A.M. Davies (eds.). American Geophysical Union, Washington, D.C. pp. 71-95.
- DAVIES, A.M. y ALDRIDGE, J.N. (1993). "A numerical model study of parameters influencing tidal currents in the Irish Sea". *Journal of Geophysical Research*, Vol. 98, N.º C4, pp. 7049-7067.
- D.H.I., DANISH HYDRAULIC INSTITUTE (1995). *MIKE 3. "User's Guide and Reference Manual"*. Lingby, Dinamarca.
- ESPINO, M., S.-ARCILLA, A. y GARCÍA, M.A. (1998). "Wind-induced mesoscale circulation off the Ebro delta, NW Mediterranean: a numerical study". *Journal of Marine Systems*, Vol. 16, pp. 235-251.
- FUNDACIÓN LEONARDO TORRES QUEVEDO (1995). "Estudio hidrodinámico, hidrológico y biológico de las Marismas de Santoña". Informe final. Universidad de Cantabria.
- FORTUNATO, A.B. y BAPTISTA, A.M. (1994). "Localized sigma coordinates for the vertical structure of hydrodynamic models. Estuarine and coastal modeling". *Proceedings of the 3rd International Conference*. M.L. Spaulding, K. Bedford, A. Blumberg, R. Cheng y C. Swanson (eds). ASCE. New York.
- GERDES, R. (1993a). "A primitive equation ocean circulation model using a general vertical coordinate transformation. 1. Description and testing of de model". *Journal of Geophysical Research*. American Geophysical Union. Vol. 98, N.º C8, pp. 14683-14701.
- GERDES, R. (1993b). "A primitive equation ocean circulation model using a general vertical coordinate transformation. 2. Application to an overflow problem". *Journal of Geophysical Research*. American Geophysical Union. Vol. 98, N.º C8, pp. 14703-14726.
- GRENIER, R.R. y LUETTICH, R.A. (1996). "The influence of turbulence closure strategy on numerical modeling of shallow water tides". *Proc. of the Int. Conf. on Coastal*

- Modeling, pp. 143-155.
- HAMRICK, J.M. (1992). "Estuarine Environmental Impact Assessment Using a Three-Dimensional Circulation and Transport Model". Proc. of the 2nd International Conference in Estuarine and coastal modeling. M.L. Spaulding (ed.). ASCE. New York. pp. 292-303.
- HANEY, R.L. (1991). "On the pressure gradient force over steep topography in sigma coordinate ocean models". Journal of Physical Oceanography, Vol. 21, pp. 610 - 619.
- HU, S. y KOT, S.C. (1997). "Numerical model of tides in Pearl river estuary with moving boundary". Journal of Hydraulic Engineering. ASCE. Vol. 123, N° 1, pp. 21-29.
- JIN, X. y KRANENBURG, C. (1993). "Quasi-3D numerical modeling of shallow-water circulation". Journal of Hydraulic Engineering. ASCE. Vol. 119, n° 4, pp. 458-472.
- KIM, C.-K. y LEE, J.-S. (1994). "A three-dimensional PC-based hydrodynamic model using an ADI scheme". Coastal Engineering. ELSEVIER. Vol. 23, pp. 271-287.
- KOUTITAS, C.G. (1987). "Three-dimensional models of coastal circulation: an engineering viewpoint. Three - dimensional Coastal Ocean Models". Coastal Estuarine Sciences 4. Christopher N.K. Mooers (ed.).
- KOWALIK, Z. y MURTY, T.S. (1993). Numerical modelling of ocean dynamics. Advanced Series on Ocean Engineering, Vol. 5, World Scientific, Singapur.
- KUNDU, P.K. (1990). Fluid Mechanics. Academic Press, Inc. London.
- LEENDERTSE, J.J. (1970). "A water quality simulation model for well mixed estuaries and coastal seas. Vol. 1. Principles of computation". RM-6230-RC. The Rand Corporation, Santa Mónica, California.
- LEENDERTSE, J.J. y LIU, S.K. (1975). "A three-dimensional model for the estuaries and coastal seas: Volume II, aspects of computation". Rand Corporation. R-1764-OWRT.
- LIN, B. y FALCONER, R.A. (1997). "Three-dimensional layer-integrated modeling of estuarine flows with flooding and drying". Estuarine, Coastal and Shelf Science. Vol. 44, pp. 737-751.
- LOMÓNACO, P. (1999). "Propagación de la onda de marea en estuarios someros". Tesis Doctoral. Universidad de Cantabria. 228 pp.
- LUETTICH, R.A. y WESTERINK, J.J. (1995). "An assessment of Flooding and Drying Techniques for Use in the ADCIRC Hydrodynamic Model". Contractors Report, Contract N° 39-94-M-5869, Coastal Engineering Research Center, U.S. Army, Vicksbury, MS.
- MADSEN, P.A., RUGBJERG, M. y WARREN, I.R. (1988). "Sub-grid Modelling in Depth Integrated Flows". Proc. 21st Coastal Engineering Conference, ASCE, New York, N.Y., Vol. 1, pp. 505-511.
- MELLOR, G.L. (1993). "A three-dimensional, primitive equation, numerical ocean model". Technical Report. Atmospheric and Oceanic Sciences Program, Princeton University.
- MELLOR, G.L. y BLUMBERG, A.F. (1985). "Modeling vertical and horizontal diffusivities with the sigma coordinate system". Mon. Weather, Rev., Vol. 113, pp. 1379 - 1383.
- MELLOR, G.L. y YAMADA, T. (1982). "Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems". Reviews of Geophysics and Space Physics. Vol. 20. No. 4, pp. 851-875.
- MUIN, M. y SPAULDING, M. (1997). "Three-dimensional boundary-fitted circulation model". Journal of Hydraulic Engineering. ASCE. Vol. 123. N° 1, pp. 2-12.
- PHILLIPS, N.A. (1957). "A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting". J. Meteor., Vol. 14, pp. 184 - 185.
- RODI, W. (1993). Turbulence Models and Their Application in Hydraulics. A state-of-the-art review. International Association for Hydraulic Research, A.A. Balkema (Ed.), Rotterdam. 104 pp.
- SHENG, Y.P., LEE, H.-K. y WANG, K.H. (1990). "On numerical strategies of estuarine and coastal modeling". Estuarine and coastal modeling. M.L. Spaulding (ed). ASCE. New York. Pp. 291-301.
- SHENG, Y.P. (1990). "Evolution of a three-dimensional curvilinear-grid hydrodynamic model for estuaries, lakes and coastal waters: CH3D". Proc. of the 1st International Conference in Estuarine and coastal modeling. M.L. Spaulding (ed.). ASCE. New York. Pp. 40-49.
- SMAGORINSKY, J. (1963). "General circulation experiments with the primitive equations. I: The basic experiment". Mon. Wea. Rev., Vol. 91, pp. 99-164.
- STELLING, G. S., WIERSMA, A.K. y WILLEMSE, J. B. T. M. (1986). "Practical aspects of accurate tidal computations". Journal of Hydraulic Engineering. Vol. 112. No. 9, pp. 802-817.
- WILCOX, D. C. (1988). "Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models". American Institute of Aeronautics and Astronautics. Vol. 26. No. 11.