

# FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE LA ALTURA DE LA PRECIPITACIÓN Y LA CORRELACION ENTRE LA INTENSIDAD Y LA DURACIÓN

Rafael S. Seoane(1), Mónica E. Gelmi(2) y Alejandra I. Vornetti(2)

## Resumen

El objetivo de esta investigación es estudiar los efectos que la correlación entre las variables intensidad y duración de la precipitación tiene sobre la función de densidad de probabilidades de la altura de precipitación. Se deducen nuevas expresiones para la función de densidad y para los momentos de primero y segundo orden de esta variable.

En la primera parte se presentan las nuevas expresiones de la función de densidad de probabilidades, la esperanza matemática y la varianza de la altura de precipitación, deducidas a partir de una función de densidad de probabilidades bivariada propuesta por Gumbel (1960) que considera la correlación mencionada.

En la segunda parte se discuten los resultados al aplicar las nuevas expresiones a series de precipitaciones observadas en escalas horaria y diaria y se demuestra la importancia de considerar la correlación para preservar los momentos de primero y segundo orden.

Los estadísticos de Kolmogorov-Smirnov y Cramér-von Mises se utilizan para medir las distancias entre las dos distribuciones acumuladas estimadas con el modelo de Gumbel (con y sin correlación) y la distribución empírica de los datos de precipitación.

Finalmente, se presenta la comparación entre los momentos de primero y segundo orden de la altura de precipitación estimados usando las nuevas expresiones y las propuestas por Córdova y Rodríguez-Iturbe (1985).

**Palabras clave:** modelos matemáticos, modelos de precipitación, propiedades probabilísticas de la precipitación.

## INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es estudiar los efectos de la correlación entre las variables intensidad y duración sobre la función de densidad de probabilidades y los momentos de la altura de la precipitación. En esta propuesta se aplica el modelo de precipitación de pulsos rectangulares con una función de densidad de probabilidades bivariada (Gumbel, 1960), que incluye la correlación entre la intensidad y la duración de los eventos de precipitación, con un intervalo de -0.25 a 0.25. El modelo se aplica a distintas series históricas de altura de precipitación en escalas de tiempo horaria y diaria.

Córdova y Rodríguez-Iturbe (1985) incluyen la correlación entre la intensidad y la duración en

las expresiones de los momentos de primero y segundo orden de la altura de precipitación y del escurrimiento superficial, utilizando una función de densidad de probabilidades bivariada propuesta por Nagao y Kadoya (1971). Córdova y Rodríguez-Iturbe (1985), en escala horaria, obtuvieron valores positivos para los coeficientes de correlación entre la intensidad y la duración y demuestran la importancia de este coeficiente en las expresiones de la media y la varianza de la altura de precipitación y del escurrimiento superficial.

Bacchi et al. (1994) utilizan una función de densidad de probabilidades bivariada (Gumbel, 1960), con un intervalo del coeficiente de correlación comprendido entre 0 y -0.4, para representar las intensidades y duraciones de eventos extremos

1) Instituto Nacional del Agua y del Ambiente, Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires y Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Argentina.

2) Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Argentina.

Artículo recibido el 5 de marzo de 1999, recibido en formas revisadas el 13 de mayo de 2000 y el 15 de julio de 2000 y aceptado para su publicación el 4 de septiembre de 2000. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo siguiendo lo indicado en las "Instrucciones para autores". En el caso de ser aceptadas, éstas serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores.

de precipitación y muestran la importancia de considerar la correlación negativa para la simulación de valores extremos que son principalmente utilizados en hidrología urbana.

Islam et al. (1990) investigan la capacidad de un modelo de precipitación estocástico puntual de pulsos rectangulares, para tener en cuenta las características estadísticas subyacentes del proceso en distintas series de precipitaciones horarias en la región central de Italia.

## METODOLOGÍA

En esta investigación se aplica la función de densidad de probabilidades bivariada propuesta por Gumbel (1960), para representar la relación entre las variables aleatorias intensidad y duración y estudiar los efectos de su correlación sobre la función de densidad de probabilidades y los dos primeros momentos de la altura de precipitación.

La función de densidad de probabilidades bivariada es:

$$f(i, t_r) = \alpha \delta \exp(-(\alpha i + \delta t_r)) [1 + \varepsilon(2\exp(-\alpha i) - 1)(2\exp(-\delta t_r) - 1)] \quad (1)$$

donde:

- $\alpha$ : inversa del valor medio de la intensidad [T/L]
- $\delta$ : inversa del valor medio de la duración [1/T]
- $i$ : intensidad de la precipitación [L/T]
- $t_r$ : duración de la precipitación [T]
- $\varepsilon$ : parámetro relacionado con el coeficiente de correlación  $\rho$  entre la intensidad y la duración ( $\rho = \varepsilon/4$ )

con las siguientes funciones de densidad de probabilidades marginales exponenciales:

$$f(i) = \alpha \exp(-\alpha i) \quad (2)$$

$$f(t_r) = \delta \exp(-\delta t_r) \quad (3)$$

A partir de la función de densidad de probabilidades bivariada (1) se deducen las expresiones de los primeros momentos de la altura de precipitación:

$$h = i t_r \quad (4)$$

$$E[h] = \int_0^\infty \int_0^\infty i t_r \alpha \delta \exp(-(\alpha i + \delta t_r)) \quad (5)$$

$$[1 + \varepsilon(2\exp(-\alpha i) - 1)(2\exp(-\delta t_r) - 1)] di dt_r$$

$$E[h^2] = \int_0^\infty \int_0^\infty (i t_r)^2 \alpha \delta \exp(-(\alpha i + \delta t_r)) \quad (6)$$

$$[1 + \varepsilon(2\exp(-\alpha i) - 1)(2\exp(-\delta t_r) - 1)] di dt_r$$

Las expresiones deducidas para la esperanza matemática  $E[h]$  y de  $E[h^2]$  son:

$$E[h] = \frac{4 + \varepsilon}{4\alpha\delta} \quad (7a) \quad E[h^2] = \frac{8 + 5\varepsilon}{2\alpha^2\delta^2} \quad (7b)$$

siendo la varianza de la altura de la precipitación:

$$Var[h] = E[h^2] - E^2[h] \quad (8)$$

$$Var[h] = \frac{48 + 32\varepsilon - \varepsilon^2}{16\alpha^2\delta^2} \quad (9)$$

La función de densidad de probabilidades de la altura de precipitación  $h$ , se obtiene a partir de la función de distribución acumulada  $F_H(h)$ :

$$F_H(h) = \int_0^\infty \int_0^{h/t_r} f(i, t_r) di dt_r \quad (10)$$

$$f_H(h) = \frac{dF_H(h)}{dh} \quad (11)$$

Reemplazando en la ecuación (10) la expresión de la función de densidad bivariada (1), y resolviendo la ecuación (11) con respecto a la altura de precipitación  $h$  se obtiene:

$$f_H(h) = \frac{-\delta(1+\varepsilon)}{\sqrt{\delta}} \left\{ \frac{\alpha K_{-1}(2\sqrt{\alpha\delta h})}{\sqrt{\alpha h}} - \frac{\alpha\delta}{\sqrt{\delta}} [K_{-2}(2\sqrt{\alpha\delta h}) + K_0(2\sqrt{\alpha\delta h})] \right\} + \quad (12)$$

$$+ \frac{2\varepsilon\delta}{\sqrt{\delta}} \left\{ \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha h}} \sqrt{2} K_{-1}(2^{3/2}\sqrt{\alpha\delta h}) + \frac{2\alpha\delta}{\sqrt{\delta}} [K_{-2}(4\sqrt{\alpha\delta h}) + K_0(4\sqrt{\alpha\delta h})] \right\} +$$

$$+ \frac{2\varepsilon\delta}{\sqrt{\delta}} \left\{ -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha h}} K_{-1}(4\sqrt{\alpha\delta h}) - \frac{2\alpha\delta}{\sqrt{\delta}} [K_{-2}(2^{3/2}\sqrt{\alpha\delta h}) + K_0(2^{3/2}\sqrt{\alpha\delta h})] \right\}$$

donde  $K_v(\cdot)$  es la función Bessel modificada de orden  $v$ .

## Información básica utilizada

Para la aplicación del modelo de precipitación es necesario estimar los momentos de primer orden de la intensidad y la duración de los eventos independientes y el coeficiente de correlación.

# FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE LA ALTURA DE LA PRECIPITACION Y LA CORRELACION ENTRE LA INTENSIDAD Y LA DURACION

Los parámetros de la nueva función de densidad de probabilidades bivariada se estiman con las series de precipitación observadas en distintas estaciones ubicadas en la cuenca del arroyo Tapalqué. La cuenca presenta un área extensa de llanura con algunas ondulaciones debido a las sierras Negra y Dos Hermanas, la superficie es de 1560 km<sup>2</sup>, con pendientes medias comprendidas entre 1.2 a 5.0 ‰. Para el período 1988 - 1997 la precipitación media anual es de 900 mm, la temperatura máxima media anual de 21° C y la temperatura mínima media anual de 7.8° C. En la Tabla N°1 se presenta un resumen de la información básica que se utiliza para estimar los parámetros del nuevo modelo de la función de densidad de probabilidades de la altura de precipitación (ecuación 12).

Tabla N° 1 Características de las series de precipitación estudiadas

Serie	Escala temporal	Número de eventos
Olavarría	Horaria	227
Durañona	Diaria	2921
Chillar	Diaria	2966
16 de Julio	Diaria	1014

## Análisis de la información de precipitación

En escala horaria, la separación de eventos independientes de precipitación, se realiza con el método propuesto por Córdova y Bras (1981), consistente en definir un período sin ocurrencia de precipitación de doce horas entre eventos. Además en este análisis no se consideran los pulsos cuya altura sea menor que 2.5 mm. El período analizado corresponde a los meses octubre - abril, que es la época de mayor precipitación del año y también cuando ocurren las crecidas en la cuenca.

En escala diaria se adopta un período sin ocurrencia de precipitación de un día para la separación entre los eventos, no se consideran las precipitaciones menores a 2.5 mm y los datos analizados son de todo el año.

En las Tablas N° 2 a 5 se presentan la media y el desvío estándar estimados para las cuatro series de precipitación en las dos escalas de tiempo estudiadas.

Tabla N° 2 Momentos estimados para la serie observada en Olavarría, escala horaria

Variable	Media	Desvío Estándar
i (mm/h)	9.86	14.13
t (horas)	3.92	3.72
h (mm)	23.98	21.68

Tabla N° 3 Momentos estimados para la serie observada en Durañona, escala diaria

Variable	Media	Desvío Estándar
i (mm/día)	13.62	14.32
t (días)	1.39	0.71
h (mm)	19.51	23.08

Tabla N° 4 Momentos estimados para la serie observada en Chillar, escala diaria

Variable	Media	Desvío Estándar
i (mm/día)	13.94	13.96
t (días)	1.39	0.74
h (mm)	19.74	23.64

Tabla N° 5 Momentos estimados para la serie observada en 16 de Julio, escala diaria

Variable	Media	Desvío Estándar
i (mm/día)	16.14	14.83
t (días)	1.31	0.64
h (mm)	21.49	22.60

## Estimación de los parámetros del modelo

Para las series de medición de precipitación estudiadas, una vez realizada la separación de los eventos, se estiman los parámetros de las dos funciones de densidad de probabilidades marginales exponenciales y el coeficiente de correlación, los cuales se presentan en la Tabla N° 6.

Tabla N° 6 Parámetros del modelo de precipitación

Serie	Escala Temporal	Parámetros		
		$\alpha(h/mm)$	$\delta(1/h)$	$\rho$
Olavarría	horaria	0.101	0.255	-0.278
Durañona	diaria	1.762	0.030	0.063
Chillar	diaria	1.722	0.030	0.040
16 de Julio	diaria	1.487	0.032	0.034

Se realiza, con la ecuación (13), la estimación del intervalo de confianza del coeficiente de correlación, Draper y Smith (1981). En la Tabla N° 7 se presentan los coeficientes de correlación entre la intensidad y la duración y sus intervalos de confianza para las distintas series estudiadas.

$$\frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+r}{1-r} \right) \pm z \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \left\{ \frac{1}{n-3} \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1+\rho}{1-\rho} \right) \quad (13)$$

donde:

- $r$  : coeficiente de correlación muestral
- $n$  : tamaño de la muestra
- $1-\alpha$  : nivel de confianza del intervalo
- $z$  : variable normal estándar.

Tabla 7. Coeficientes de correlación e intervalos de confianza

Serie	Escala temporal	Coeficiente de correlación	Intervalo de confianza (95 %)	
Olavarría	horaria	-0.278	-0.394	-0.153
Durañona	diaria	0.063	-0.115	0.237
Chillar	diaria	0.040	-0.138	0.215
16 de Julio	diaria	0.034	-0.144	0.210

En escala diaria, la estimación de los distintos intervalos de confianza del coeficiente de correlación entre la intensidad y la duración para las series observadas en las estaciones Durañona, Chillar y 16 de Julio muestran que los intervalos de confianza del coeficiente incluyen al cero.

En escala horaria, el intervalo de confianza del coeficiente de correlación estimado para la serie observada en Olavarría, muestra que este coeficiente es significativamente distinto de cero y justifica el interés de estudiar su influencia sobre el nivel de ajuste alcanzado por el nuevo modelo.

En las figuras 1a y 1b se muestra el efecto que la correlación entre la intensidad y la duración tiene sobre la forma de la función de densidad de probabilidades bivariada de Gumbel para dos casos:  $\rho = 0$  y  $\rho = -0.25$ .

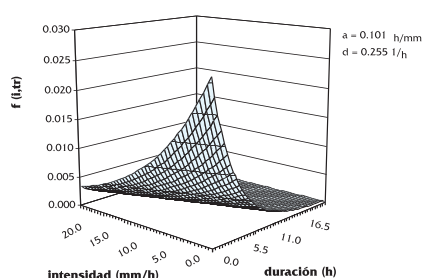


Figura 1a. Función de densidad de probabilidades bivariada ( $\rho = 0$ )

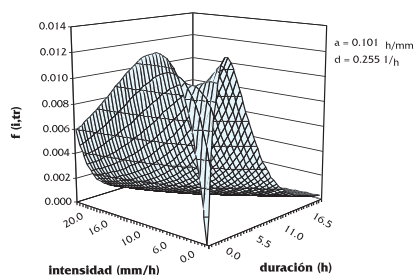


Figura 1b. Función de densidad de probabilidades bivariada ( $\rho = -0.25$ )

## RESULTADOS OBTENIDOS

En la Tabla 8 se presenta una comparación entre las estimaciones que se obtienen con las nuevas expresiones, que consideran la dependencia entre la intensidad y la duración de la precipitación, y los valores de la media y el desvío estándar estimados a partir de la serie histórica horaria observada en Olavarría.

Tabla 8. Comparación de los primeros momentos para la serie de Olavarría

Media			Desvío estándar		
Observada	Estimada $\rho = 0$	Estimada $\rho < 0$	Observada	Estimado $\rho = 0$	Estimado $\rho < 0$
23.98	38.62	28.64	21.68	66.89	37.39

Los resultados muestran que los momentos de la altura de precipitación estimados bajo la hipótesis de independencia sobrestiman considerablemente a los valores históricos. Se observa que el nuevo modelo se ajusta mejor a los datos observados, aunque ambos sobrestiman la dispersión.

A continuación se presentan los resultados que muestran la importancia del coeficiente de correlación entre la intensidad y la duración de la precipitación en el ajuste de la función de distribución acumulada de la altura de precipitación.

En la Figura 2 se presentan las funciones de distribución acumuladas estimadas para los coeficientes de correlación  $-0.25$  y  $0$ , y la función de distribución acumulada empírica.

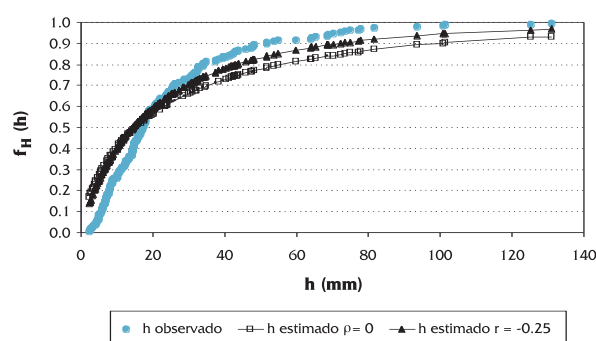


Figura 2. Funciones de distribución acumuladas de la altura de precipitación en la serie Olavarría

La figura anterior muestra que el ajuste de la función de distribución acumulada mejora al incluir la correlación entre la intensidad y la duración, aunque ambos modelos muestran una tendencia a sobrestimar la proporción de valores atípicos o muy grandes.

# FUNCIÓN DE DENSIDAD DE PROBABILIDADES DE LA ALTURA DE LA PRECIPITACION Y LA CORRELACION ENTRE LA INTENSIDAD Y LA DURACION

Se han calculado dos medidas de distancia entre las dos funciones de distribución acumuladas estimadas con el modelo de Gumbel (con y sin correlación) y la distribución empírica. En la Tabla 9 se presentan los resultados de aplicar la distancia de Kolmogorov-Smirnov (ecuación 14) y la de Cramér-von Mises (ecuación 15).

$$D_n = \max_{j=1}^n \left| \left[ \frac{j}{n} - F_x(X_j) \right] \right| \quad (14)$$

$$W_n = \sum_{j=1}^n \left( F_x(X_j) - \frac{j-1}{n} \right)^2 + \frac{1}{12n} \quad (15)$$

donde:

- $D_n$ : distancia de Kolmogorov-Smirnov
- $W_n$ : distancia de Cramér-von Mises
- $X_j$ : altura de precipitación observada
- $F_x(X_j)$ : función de distribución acumulada de la altura de precipitación
- $j$ : número de orden
- $n$ : tamaño de la muestra.

Tabla 9. Comparación de las funciones de distribución acumulada de la altura de precipitación en la serie Olavarría, escala horaria.

$\rho$	$D_n$	$W_n$
- 0.25	0.18	2.25
0.00	0.21	3.16

Los resultados de la tabla anterior muestran cuantitativamente el efecto del coeficiente de correlación sobre las dos distancias utilizadas. Ambas distancias muestran que la función de distribución que incluye la correlación está más cerca de la empírica.

Finalmente, se analiza el ajuste de la función de densidad de probabilidades teórica al conjunto de observaciones, superponiendo la función de densidad ajustada y el histograma de los datos. Para que la comparación sea factible es necesario cambiar la escala de la función de densidad de probabilidades o la del histograma de tal manera que el área total de las barras sea igual a uno, Wilks (1995).

Se realiza un histograma con los datos de altura de precipitación horaria en la estación Olavarría y en la Figura 3 cada barra del histograma representa la cantidad de ocurrencias de la variable en estudio en cada intervalo dividido por el ancho del mismo.

Las curvas corresponden a las funciones de densidad de probabilidades de la altura de precipitación utilizando la función de densidad bivariada de Gumbel, para  $\rho = 0$  y  $\rho = -0.25$ .

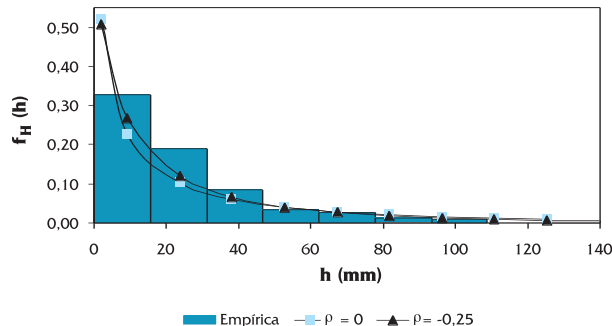


Figura 3. Funciones de densidad de probabilidades de la altura de precipitación

En la figura anterior se observa que el ajuste alcanzado con la función de densidad de probabilidades de la altura de precipitación que incluye la correlación entre la intensidad y la duración, es mejor que el obtenido bajo la hipótesis de independencia.

Con el propósito de estudiar la influencia que la expresión de la función bivariada tiene sobre los momentos de la altura de precipitación, se comparan las estimaciones de los dos primeros momentos de la serie histórica observada en Boconó, Venezuela, con los estimados usando dos modelos: el de Córdova y Rodríguez-Iturbe (1985), que utiliza una función de densidad de probabilidades bivariada propuesta por Nagao y Kadoya, y el considerado en este trabajo con las nuevas expresiones deducidas usando la función de densidad bivariada de Gumbel, ecuaciones 7 y 9, Tabla 10.

Tabla 10. Comparación de los estadísticos de la altura de precipitación en Boconó (Venezuela)

Estadísticos de h	Observado	Nagao y Kadoya*		Gumbel	
		$\rho = 0$	$\rho \neq 0$	$\rho = 0$	$\rho \neq 0$
Media (mm)	4.39	3.37	4.38	3.37	4.20
Desvío estándar (mm)	7.08	5.84	9.05	5.84	7.47

\* Datos obtenidos de Córdova y Rodríguez-Iturbe (1985)

Los resultados de la Tabla 10 indican que la función de densidad de probabilidades de la altura de precipitación que utiliza la función bivariada propuesta por Gumbel, muestra un desvío estándar más cercano al estimado con los datos observados que la que utiliza la función bivariada de Nagao y Kadoya (1971) para un coeficiente de correlación entre la intensidad y la duración distinto de cero.



## CONCLUSIONES

Los resultados del trabajo incluyen la estimación del coeficiente de correlación entre la intensidad y la duración de la precipitación para escalas diaria y horaria y muestran que el coeficiente es significativamente distinto de cero solamente para la serie de datos de precipitación en escala horaria. Este último resultado fundamenta que el estudio de las precipitaciones se haya centrado en esta escala de tiempo y permitirá considerar los efectos de la correlación entre la intensidad y la duración de la precipitación sobre el escurrimiento superficial en escalas temporales pequeñas, Córdova y Rodríguez-Iturbe (1985).

Se estudió la influencia de la correlación entre ambas variables sobre la forma y los momentos de la función de densidad de probabilidades de la altura de precipitación, en escala horaria. El análisis incluyó la comparación gráfica de las funciones de densidad de probabilidades y de las funciones de distribución acumuladas, con y sin correlación, con la empírica y mostró un mejor ajuste al incluir el nuevo parámetro.

Para evaluar el mejor ajuste de la función de densidad de probabilidades que incluye la correlación, se estimaron dos medidas de distancia entre las distribuciones teóricas y la empírica (distancias de Kolmogorov-Smirnov y Cramér-von Mises). Los resultados obtenidos mostraron cuantitativamente la importancia de incluir el nuevo parámetro sobre el ajuste de la función de densidad de probabilidades de la altura de precipitación a las observaciones históricas.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su reconocimiento a la Lic. Irene Obertello, a la Dra. Marta García Ben de la Universidad de Buenos Aires y a la Ingra. Patricia López del Instituto Nacional del Agua y del Ambiente, cuyos comentarios y discusiones contribuyeron significativamente al desarrollo de este trabajo.

Al Servicio Meteorológico Nacional por la información meteorológica suministrada para este estudio. A la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, por los subsidios recibidos. A la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica y al Consejo Nacional de Investigaciones

Científicas y Técnicas por el subsidio (PMT-PICT 0495).

## LISTA DE SÍMBOLOS

$i$	intensidad de la precipitación.
$t_r$	duración de la precipitación.
$\alpha$	inversa del valor medio de la intensidad.
$\delta$	inversa del valor medio de la duración.
$\rho$	coeficiente de correlación entre la intensidad y la duración.
$h$	altura de la precipitación.
$K_\nu()$	función Bessel modificada de orden $\nu$ .
$r$	coeficiente de correlación muestral.
$D_n$	distancia Kolmogorov-Smirnov.
$W_n$	distancia de Cramér-von Mises.

## REFERENCIAS

- Bacchi, B., G. Becciu y N. Kottegoda, (1994) Bivariate exponential model applied to intensities and duration of extreme rainfall. *Journal of Hydrology*, 155, 225-236.
- Benjamin J.R. y C.A. Cornell, (1970) *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*. Mc Graw-Hill Book Company.
- Córdova, J.R. y R.L. Bras, (1981) Physically based probabilistic models of infiltration, soil moisture and actual evapotranspiration. *Water Resources Research*. 17(1), 93-106.
- Córdova, J.R. y I. Rodríguez-Iturbe, (1985) On the probabilistic structure of storm surface runoff. *Water Resources Research*. 21(5), 755-763.
- Draper, N. R. y H. Smith, (1981) *Applied Regression Analysis*. Wiley & Sons.
- Durbin, J., (1986) Distribution theory for test based on the sample distribution function. *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*.
- Gradshteyn, I. S. y M. Ryzhik, (1980) *Table of Integrals, Series and Products*. Academic Press. Nueva York.
- Gumbel, E. J., (1960) Bivariate exponential distributions. *J. Am. Stats. Assoc.* 55: 698-707.
- Islam, S., D. Entekhabi, R. L. Bras e I. Rodríguez-Iturbe, (1990) Parameter Estimation and Sensitivity Analysis for the Modified Bartlett-Lewis Rectangular Pulses Model of Rainfall. *Journal of Geophysical Research*. 95(D3), 2093-2100.
- Nagao M. y M. Kadoya, (1971) Two-variate exponential distribution and its numerical table for engineering applications. *Bull. Disaster Prev. Res. Inst., Kyoto Univ.*, 20(3), 183-215.
- Wilks, D.S., (1995) *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences*. Academic Press. Nueva York.