

# SIMULACIÓN DE FLUJOS EN CANALES ABIERTOS CON PENDIENTES FUERTES

Tarek M. Salaheldin<sup>1</sup>, Jasmin Imran<sup>2</sup> y M. Hanif Chaudhry<sup>3</sup>

## Resumen:

En el presente artículo se discute la simulación de flujos en canales abiertos con frentes pronunciados. Los métodos existentes en la literatura para representar este tipo de flujos son el método de las características, el de diferencias finitas, el de elementos finitos y el de volúmenes finitos.

Se enuncian las ecuaciones de movimiento para el flujo en canales, promediadas verticalmente (para aguas someras) y transversalmente, haciendo una breve discusión de las técnicas numéricas. Así mismo, se indican las condiciones iniciales y de contorno necesarias para completar la construcción de los modelos. Finalmente las técnicas anteriores son aplicadas al análisis de algunos problemas de flujo frecuentes en este campo.

**Palabras clave:** onda de choque, bore, ecuaciones determinantes, características, diferencias finitas, elementos finitos, volúmenes finitos, aplicaciones, zonas áridas, zonas semiáridas, procesos hidrológicos, modelos matemáticos, ciclo hidrológico.

## INTRODUCCIÓN

Una onda puede ser definida como una variación espacio temporal en el calado y el caudal. Estas ondas son clasificables según diferentes tipos: ondas oscilatorias, cuando no existe transporte de masa en la dirección de propagación, y ondas de traslación, cuando se tiene transporte neto de materia. Una onda que presente un frente pronunciado o una acusada perturbación de la superficie del agua es usualmente conocida como bore wave<sup>4</sup>, onda de choque u onda estacionaria. Estas ondas, tanto de choque como de frente pronunciado, deben ser tomadas en consideración para el análisis y diseño de flujos en canales abiertos, especialmente en el caso de flujos de alta velocidad (flujo supercrítico). Si

las ondas de choque no son tenidas en cuenta pueden generarse problemas tales como el desbordamiento debido a una altura insuficiente de cajeros o a un nivel bajo de las riberas, así como daños a las diferentes estructuras hidráulicas a lo largo del canal. Estos tipos de ondas pueden generarse tanto en cauces naturales como en canales artificiales. Ejemplos típicos pueden ser observados en cauces montañosos, ríos durante períodos de crecidas generadas tras un terremoto, deslizamientos de tierras, períodos de deshielo, fuertes precipitaciones o roturas de presas. También se pueden generar por apertura/cierre de compuertas de control, maniobras en compuertas de navegación o alteraciones en operaciones de desague (Chaudhry 1987, 1993, y 1996).

Departamento de Ingeniería Civil y Medioambiental, Universidad de Carolina del Sur, 300 S. Main Street, Columbia, SC 29208, USA.

Traducción: Antonio Moñino Ferrando, Licenciado en Ciencias Físicas, Grupo de Puertos y Costas, Universidad de Granada.

1. Investigador Asociado. 2. Profesor Asociado. 3. Sr. y Sra. Irwin B. Kahn, Catedrático y Director.

Traducción: Antonio Moñino Ferrando, Licenciado en Ciencias Físicas, Grupo de Puertos y Costas, Universidad de Granada.

4. El término "bore wave" se utiliza con carácter internacional para designar el frente de onda, cuando éste presenta una forma pronunciada debido a roturas y perturbaciones. Aun cuando esta denominación es usada principalmente en Ingeniería de Costas, también es aplicable al caso de fuertes perturbaciones propagándose en canales, de manera que se respeta en este caso la terminología original. N. del T.

Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo siguiendo lo indicado en las "Instrucciones para autores". En el caso de ser aceptadas, éstas serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores.

Los flujos con ondas de choque o frentes de onda pronunciados se caracterizan por una acusada variación de las magnitudes físicas en la dirección vertical. Los procedimientos usuales para analizar el flujo gradualmente variado no son aplicables de ningún modo a estos tipos de flujo, ya que no pueden tener en cuenta frentes de onda ni ondas de choque. Los procedimientos para analizar el flujo gradualmente variado suponen una distribución hidrostática de presiones en la dirección vertical. Sin embargo, en el caso de flujos con frentes de onda esta simplificación no es válida, especialmente en las proximidades del frente (Basco, 1983). Por tanto, para el análisis de flujos en lámina libre con frentes de onda se requieren métodos específicos.

Numerosos estudios han sido llevados a término para modelar el flujo con frente de onda en canales, desarrollándose diferentes técnicas para describir flujos bidimensionales con frentes de onda y calados pequeños. Demuren (1979) estudió flujos subcríticos y supercríticos, si bien la capacidad del esquema numérico para representar los abruptos cambios en el flujo no quedó demostrada claramente. Bagge & Herbich (1967), Herbich & Walsh (1972), Villegas (1976) y Dakshinamoorth (1979) usaron el método de las características (MOC) para el análisis de flujos supercríticos estacionarios. Así mismo, Katopodes & Strelkoff (1978) usaron el MOC en el análisis de flujos generados por rotura de presas. Los procedimientos fundamentales del MOC no son capaces de tener en cuenta frentes de onda acusados ni resaltos hidráulicos oblicuos, siendo necesarias numerosas interpolaciones que pueden afectar de forma adversa a la precisión del resultado.

García & Kahawita (1986), Jiménez & Chaudhry (1988), Fennema & Chaudhry (1990), Gharangik & Chaudhry (1996), Bhallamundi & Chaudhry (1992), Younus & Chaudhry (1993), Raman & Chaudhry (1996), Meselhe et al. (1997), Ming & Fread (1997), y Mohapatra et al. (1999) utilizaron diferentes métodos de diferencias finitas (FDM) con detección de ondas de choque para analizar flujos rápidamente variados, p.e., resaltos hidráulicos y flujos en rotura de presas.

Akanbi & Katopodes (1988) modelaron la propagación de crecidas sobre lechos inicialmente secos usando el método de elementos finitos (FEM). Berger (1993) presentó un esquema usando el FEM para la detección de ondas de choque en flujo en canales abiertos. Berger et al. (1995), Stockstill (1995) y Stockstill et al. (1997) estudiaron el flujo bidimensional en régimen libre y con calados pequeños por medio del FEM.

Bellos et al. (1991), Tan (1992), Alcrudo & García-Navarro (1993), Zhao et al. (1994) y Zhao et al. (1996) aplicaron el método de volúmenes finitos (FVM) al caso de flujos bidimensionales con calados pequeños y frentes de onda pronunciados. Este artículo está dedicado principalmente a resumir y comparar todos estas técnicas.

## ECUACIONES DETERMINANTES

### Ecuaciones promediadas verticalmente

En numerosas situaciones, la consideración de flujo unidimensional no es válida, debiendo ser consideradas las componentes en las otras dos dimensiones, p.e., en el caso del flujo aguas debajo de una presa fracturada, en diques rotos, en resaltos hidráulicos circulares y oblicuos, ensanchamientos/contracciones rectas o circulares, etc. Aunque el flujo en estas situaciones es tridimensional, su análisis puede ser simplificado usando magnitudes promediadas verticalmente y tratando el problema como un flujo bidimensional en la dirección horizontal.

Las ecuaciones de Saint-Venant describen el flujo bidimensional no estacionario promediado verticalmente. Dichas ecuaciones representan los principios de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento, estando obtenidas a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes bajo ciertas simplificaciones; p.e., Baker (1983) y Chaudhry (1998).

En términos de las variables fundamentales del flujo  $h$ ,  $u$  y  $v$ , las ecuaciones de Saint-Venant en forma conservativa pueden ser escritas vectorialmente como sigue:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + S = 0 \quad (1)$$

donde

$$\begin{aligned} U &= \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \end{bmatrix} \quad E_x = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{bmatrix} \quad F_y = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \\ S &= \begin{bmatrix} 0 \\ -gh(S_{ox} - S_{fx}) \\ -gh(S_{oy} - S_{fy}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

en las que  $t$  es el tiempo;  $u$  y  $v$  son las componentes del vector velocidad del flujo en las direcciones  $x$  e  $y$  (direcciones longitudinal y transversal);  $h$  es la profundidad del agua medida verticalmente;  $g$  es la aceleración de la gravedad;  $S_{ox}$  y  $S_{oy}$  son las pendientes de la solera en las direcciones  $x$  e  $y$ ;  $S_{fx}$  y  $S_{fy}$  son las pendientes de fricción en las direcciones  $x$  e  $y$ ,  $x$  e  $y$  son las variables del sistema coordenado, tal como se muestra en la Figura 1.  $E_x$  y  $F_y$  son los denominados vectores de flujo;  $U$  es el vector de las variables dependientes y  $S$  es el vector fuente. Las pendientes de fricción  $S_{fx}$  y  $S_{fy}$  pueden ser calculadas usando las fórmulas para régimen estacionario:

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{C_o^2 h^{1.33}}; \quad S = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{C_o^2 h^{1.33}} \quad (3)$$

en la que  $n$ =coeficiente de rugosidad de Manning y  $C_o$ =factor de corrección de unidades ( $C_o=1$  en unidades SI y 1.49 en Unidades Inglesas). Las variables independientes en las ecuaciones de Saint-Venant son ( $x, y, t$ ). Si el flujo es estacionario (constante en el tiempo), los términos no estacionarios de la ecuación pueden ser despreciados, adoptando la forma:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + S = 0 \quad (4)$$

## Ecuaciones promediadas transversalmente

En algunos casos especiales, la variación de los parámetros del flujo en la dirección vertical es mayor y más importante que la variación en la dirección transversal, p.e., en el resalto hidráulico o en las ondas de choque en canales de ancho uniforme. En tal caso, las ecuaciones determinantes promediadas transversalmente pueden ser usadas para modelar estos tipos de flujo. Las ecuaciones promediadas transversalmente pueden ser escritas en forma conservativa como sigue (Chaudhry, 1996):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} + S = 0 \quad (5)$$

donde

$$U = \begin{bmatrix} h \\ UB \\ WB \end{bmatrix}, \quad E_x = \begin{bmatrix} Uh \\ U^2 B + gBh - B(h + z_b) \cdot \frac{dW}{dt} \\ BUW \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$F_y = \begin{bmatrix} 0 \\ BUV \\ \dots, \dots, dW \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ -gBS_{ox} \\ -\sigma B \end{bmatrix}$$

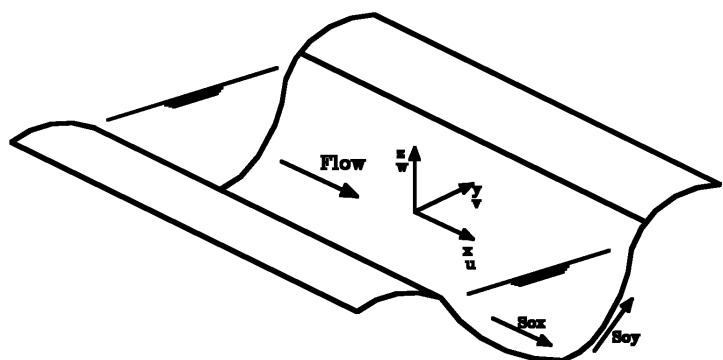


Figura 1. Coordenadas del flujo en canal.

en las que  $U$  y  $W$  son las velocidades promediadas transversalmente en las direcciones longitudinal y vertical (direcciones  $x$  y  $z$  respectivamente);  $y B$  es ancho del canal. De acuerdo con la teoría de las Características, la ecuaciones de Saint-Venant son hiperbólicas si el flujo es supercrítico ( $F_r > 1$ ), parabólicas si el flujo es crítico ( $F_r = 1$ ) y elípticas si el flujo es subcrítico ( $F_r < 1$ ), (Jiménez & Chaudhry, 1988).

Las ecuaciones de Saint-Venant (1), (4) y (5) son ecuaciones diferenciales parciales no-lineales de primer orden, para las que no existen soluciones analíticas (excepto para problemas de flujo unidimensional muy simplificados), de manera que son necesarias las soluciones numéricas (Chaudhry, 1993). Tal como se ha comentado anteriormente, existen diversos métodos numéricos (MOC, FDM, FEM y FVM) para modelar flujos bidimensionales con calados pequeños y frentes de onda acusados. Algunos de estos métodos son revisados en las siguientes secciones, comentándose una serie de ejemplos. Debe ser destacado que no existe un único procedimiento para todos los problemas, de manera que la elección del método a utilizar depende del buen criterio del usuario (Pepper & Baker, 1988).

## TÉCNICAS DE RESOLUCIÓN NUMÉRICA

### Método de las Características

El método de las Características (MOC) es el primero que se utilizó para la simulación de diversos problemas de flujo. Monge desarrolló el procedimiento gráfico para la integración de ecuaciones diferenciales parciales en 1789, y llamó a dicho procedimiento método de las Características. Fue usado por Massau (1889) y Craya (1946) para analizar sobreelevaciones en canales abiertos e investigar la propagación de crecidas y otros problemas de

flujo no estacionario. Aunque es considerado como un método convencional para el análisis de transitorios en conductos cerrados, su aplicación al caso de canales abiertos es casi insignificante, habiendo sido reemplazado por los otros métodos (FDM, FEM, FVM), (Chaudhry, 1993). Los detalles de este método pueden ser consultados en Chaudhry (1993) para el flujo unidimensional, y en Katopodes & Strelkoff (1978) para el flujo bidimensional con calados pequeños.

### Método de Diferencias Finitas

El método de diferencias finitas (FDM) presentado por Lax & Wendroff (1960) en general es para resolver las ecuaciones determinantes de los problemas de flujo bidimensional no estacionario (ecuaciones de Saint-Venant). Existen diferentes modelos numéricos para el FDM. Estos modelos, generalmente conocidos como modelos de dos pasos (secuencia de predicción-corrección), son aproximaciones espacio-temporales de segundo orden basadas en desarrollos en serie de Taylor hasta segundo orden.

Se han desarrollado diferentes esquemas de diferencias finitas implícitos y explícitos para la re-

solución de las ecuaciones de gobierno. Algunos de ellos son capaces de simular flujos tanto subcríticos como supercríticos, (Chaudhry, 1993). En aras de la brevedad de este trabajo se discuten dos esquemas: uno explícito y otro implícito. Los detalles completos de ellos pueden ser consultados en Chaudhry (1993).

La notación utilizada para la malla de diferencias finitas en  $(x, y, t)$  se muestra en la Figura 2. Las direcciones  $x$  e  $y$  se designan por los subíndices  $i$  y  $j$  respectivamente, mientras que el subíndice  $k$  representa al tiempo. El instante en el que todas las variables son conocidas se representa con el superíndice  $k$ , mientras que el instante incógnita se representa con  $k+1$ . El número total de nodos en  $(x, y, t)$  son  $N+1$ ,  $M+1$  y  $K+1$  respectivamente.

### Modelo de MacCormack

El modelo de MacCormack es un esquema explícito en diferencias finitas. Consiste en una secuencia de predicción-corrección de dos pasos. Las siguientes ecuaciones en diferencias pueden ser aplicadas para aproximar las ecuaciones de Saint-Venant (ec. 1) para régimen no estacionario prome-

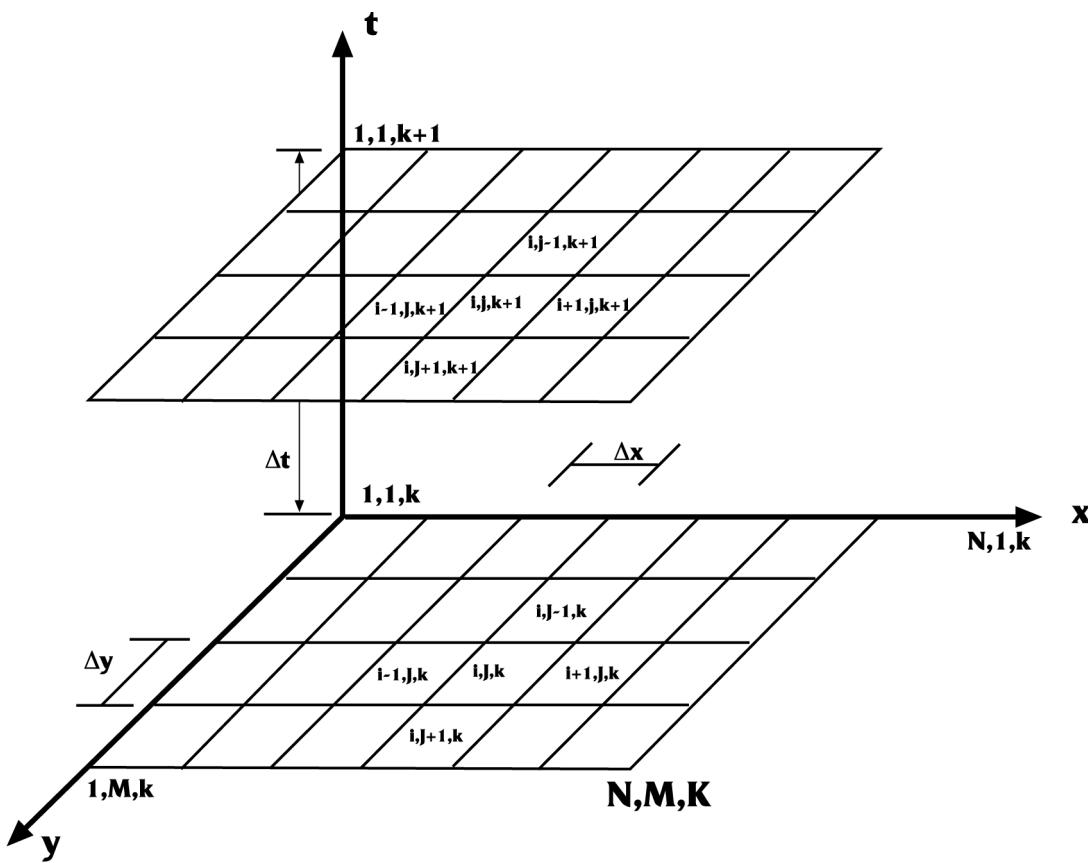


Figura 2. Malla de diferencias finitas (Referencia: Chaudhry, 1993).

diadas verticalmente. Los términos de predicción-corrección están definidos del siguiente modo:

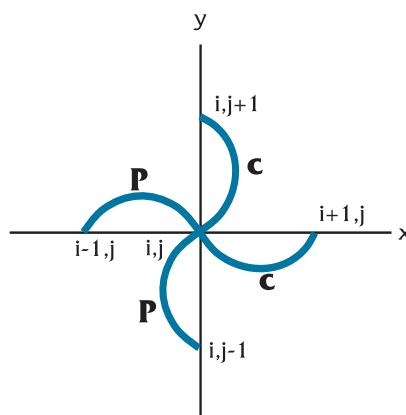
$$U_{i,j}^* = U_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \nabla_x E_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta y} \nabla_y F_{i,j}^k - \Delta t \cdot S_{i,j}^k \quad \begin{cases} 2 \leq i \leq N \\ 2 \leq j \leq M \end{cases} \quad (7)$$

$$U_{i,j}^{**} = U_{i,j}^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta_x E_{i,j}^* - \frac{\Delta t}{\Delta y} \Delta_y F_{i,j}^* - \Delta t \cdot S_{i,j}^* \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq N-1 \\ 1 \leq j \leq M-1 \end{cases} \quad (8)$$

El valor final del vector de variables dependientes U en el nuevo instante  $k+1$  puede calcularse a partir de:

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{2} (U_{i,j}^* + U_{i,j}^{**}) \quad (9)$$

El esquema usa las diferencias espaciales previas ( $\nabla_x, \nabla_y$ ) en el término de predicción, y diferencias espaciales posteriores ( $\Delta_x, \Delta_y$ ) en el término de corrección. Los operadores de diferencia previa y posterior se definen como:



**Time step K**

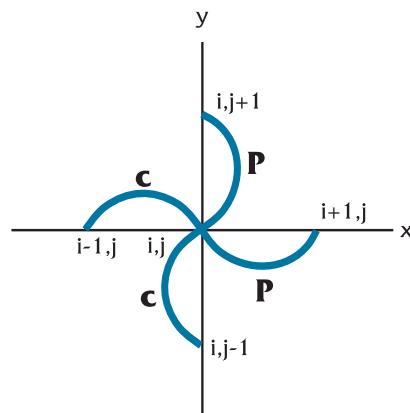
$$\begin{aligned} \Delta_x U_{i,j} &= U_{i+1,j} - U_{i,j} & \Delta_y U_{i,j} &= U_{i,j+1} - U_{i,j} \\ \nabla_x U_{i,j} &= U_{i,j} - U_{i-1,j} & \nabla_y U_{i,j} &= U_{i,j} - U_{i,j-1} \end{aligned} \quad (10)$$

El término de corrección usa incrementos hacia el lado opuesto que los utilizados por el término de predicción, debiendo ser alternados en cada incremento de tiempo, Chaudhry (1993). La Figura 3 muestra las secuencias de incrementos. Con esta secuencia se reducen la mayoría de las desviaciones direccionales del esquema.

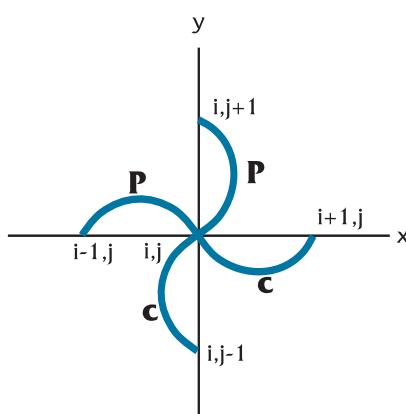
En el caso de las ecuaciones de Saint-Venant (ec. 4) para régimen estacionario promediadas verticalmente, los términos de corrección y predicción para el modelo de MacCormack se escriben de la siguiente forma:

$$E_{i,j}^* = E_{i,j} - \frac{\Delta x}{\Delta x} (F_{i+1,j} - F_{i,j}) - \Delta x \cdot S_{i,j} \quad \begin{cases} 2 \leq i \leq N \\ 2 \leq j \leq M \end{cases} \quad (11)$$

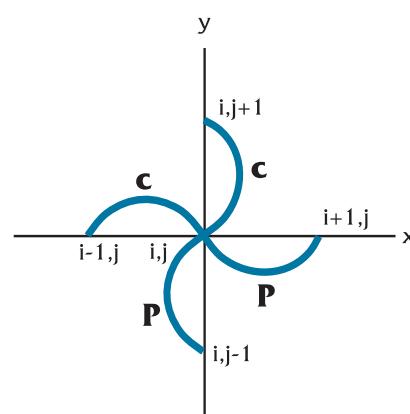
$$E_{i,j}^{**} = E_{i,j} - \frac{\Delta x}{\Delta x} (F_{i,j}^* - F_{i-1,j}) - \Delta x \cdot S_{i,j}^* \quad \begin{cases} 1 \leq i \leq N-1 \\ 1 \leq j \leq M-1 \end{cases} \quad (12)$$



**Time step K+1**



**Time step K+2**



**Time step K+3**

Figura 3. Secuencias de diferenciación (Referencia: Chaudhry, 1993).

$$y \quad E_{i,j} = \frac{1}{2}(E_{i,j}^* + E_{i,j}^{**}) \quad (13)$$

### Estabilidad

La estabilidad de un modelo numérico puede ser analizada comprobando si un error crece o decrece a medida que el proceso resolutivo avanza. No se dispone de métodos para estudiar la estabilidad de la solución numérica de ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales. No obstante, la estabilidad puede ser estudiada despreciando o linealizando los términos no lineales, (Chaudhry, 1993).

La condición de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL) debe ser satisfecha para que el modelo anterior sea estable. La condición CFL para las ecuaciones de Saint-Venant (ec. 1) no estacionarias promediadas verticalmente puede escribirse (Anderson et al., 1984):

$$C_n = |\lambda_{\max}| \frac{\Delta x}{\Delta y} \leq 1 \quad (14)$$

donde  $|\lambda_{\max}|$  representa el máximo absoluto de la pendiente característica, y  $C_n$  es el denominado número de Courant. El máximo absoluto de la pendiente característica  $\lambda_{\max}$  puede ser deducido a partir de la siguiente expresión (Anderson et al., 1984):

$$\lambda_{\max} = \frac{|uv| + gh\sqrt{F_r^2 - 1}}{u^2 - gh} \quad (15)$$

Anderson et al. (1984) recomiendan el uso de un valor del número de Courant  $C_n$  tan grande como sea posible para lograr el mínimo error de truncado en el modelo de MacCormak.

### Modelo de Beam y Warming

Los modelos de Beam y Warming son esquemas implícitos no iterativos de incrementos finitos propuestos por estos autores (1976) para resolver sistemas hiperbólicos en forma conservativa. Los esquemas están constituidos por aproximaciones temporales de segundo orden, pudiendo hacerse aproximaciones de segundo o cuarto orden para la parte espacial. Las derivadas espaciales son aproximadas usando derivación central. La ecuación (1) puede ser resuelta usando las aproximaciones de incrementos de tiempo en la siguiente forma:

$$U^{k+1} = U^k + \Delta t \left[ \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^{k+1} + \dots \right] \quad (16)$$

en la que  $\theta$  y  $\xi$  son parámetros que conducen a diferentes esquemas según su valor (véanse detalles en Chaudhry, 1993). La sustitución de  $(\partial U / \partial t)$  a partir de (1) en términos de los vectores de flujo y del vector fuente conduce a:

$$U^{k+1} = U^k - \Delta t \left[ \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + S \right)^{k+1} + \frac{1-\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + S \right)^k \right] + \frac{\xi \Delta t}{1+\xi} \left( \frac{\partial U}{\partial t} \right)^{k-1} \quad (17)$$

Los vectores de flujo y el vector fuente en el instante  $k+1$  pueden hacerse lineales usando un desarrollo en serie de Taylor local. El desarrollo hasta segundo orden de estos términos puede escribirse de la siguiente forma (usando la regla de la cadena y el desarrollo de Taylor):

$$\begin{aligned} E^{k+1} &= E^k + A^k (U^{k+1} - U^k) \\ F^{k+1} &= F^k + B^k (U^{k+1} - U^k) \\ S^{k+1} &= S^k + Q^k (U^{k+1} - U^k) \end{aligned} \quad (18)$$

donde  $A^k$ ,  $B^k$ , y  $Q^k$  son los Jacobianos de  $E$ ,  $F$  y  $S$  respectivamente:

$$A^k = \frac{\partial E^k}{\partial U}, \quad B^k = \frac{\partial F^k}{\partial U}, \quad Q^k = \frac{\partial S^k}{\partial U} \quad (19)$$

Pasando las variables dependientes evaluadas en el instante posterior al miembro de la izquierda puede formarse un sistema lineal para  $U^{k+1}$ :

$$\begin{aligned} & \left[ I + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial A^k}{\partial x} + \frac{\partial B^k}{\partial y} + Q^k \right) \right] U^{k+1} = \\ & = \left[ I + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial A^k}{\partial x} + \frac{\partial B^k}{\partial y} + Q^k \right) \right] U^k \end{aligned} \quad (20)$$

en donde  $I$  es la matriz unitaria. El vector  $U$  ha de ser evaluado dentro de los intervalos de derivación. Puesto que los términos entre corchetes a izquierda y derecha son idénticos, el operador de diferencia finita posterior ( $\Delta_t U^{k+1} = U^{k+1} - U^k$ ) puede utilizarse para escribir (ec. 20) en la forma:

$$\begin{aligned} & \left[ I + \Delta t \frac{\theta}{1+\xi} \left( \frac{\partial A^k}{\partial x} + \frac{\partial B^k}{\partial y} + Q^k \right) \right] \Delta_t U^{k+1} = \\ & = -\Delta t \frac{1}{1+\xi} \left( \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + S \right)^k + \frac{\xi}{\xi+1} \Delta_t U^k \end{aligned} \quad (21)$$

Este algoritmo se dice que está en forma “delta”; las variables de flujo,  $U$ , existen solo como incrementos de  $U$  entre cada dos intervalos de tiempo. La principal ventaja de esta formulación radica en la eficiencia de cálculo generada por la reducción del número de términos. Una resolución más eficaz se logra factorizando el miembro de la izquierda en la ecuación 21, obteniéndose lo que se denominan esquemas factorizados (véanse detalles en Chaudhry, 1993).

## Viscosidad artificial

En muchos esquemas de diferencias finitas de segundo orden, se tienen oscilaciones de alta frecuencia cerca de los gradientes fuertes debido a errores de dispersión (errores de truncaje) por causa de la integración numérica. Por ello puede ser necesario añadir explícitamente un término amortiguador para atenuar estas oscilaciones. El procedimiento usado frecuentemente en el pasado para amortiguar las oscilaciones fue desarrollado por Jameson et al. (1981). La ventaja de dicho procedimiento consiste en que suaviza las regiones de fuertes gradientes y deja las áreas de gradientes suaves sin modificar. En el caso de las ecuaciones de Saint-Venant no estacionarias promediadas verticalmente, se añaden términos disipadores artificiales.

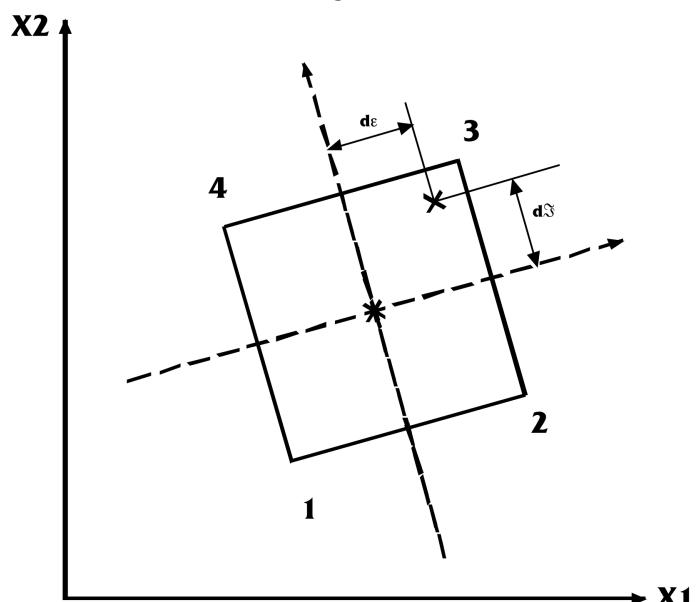
## Método de Elementos Finitos

El método de elementos finitos (FEM) es una técnica alternativa para resolver la ecuación de Saint-Venant promediada verticalmente. La principal ventaja del método de elementos finitos FEM respecto al FDM es su capacidad para tratar contornos irregulares y reajustes en la malla, mientras que la malla de cálculo utilizada en el FDM está definida por líneas paralelas, usualmente a intervalos iguales. Cerca de contornos y regiones con cambios bruscos se requiere un espaciado de malla más pequeño. La formulación del FEM generalmente implica los siguientes pasos (Baliga & Patankar, 1988): discretización del dominio en elementos, prescripción de las funciones de interpolación de cada elemento para las variables dependientes (también llamadas funciones de forma o funciones base), derivación de las ecuaciones de discretización usando el principio variacional o el método de formulación de residuos ponderados, recopilación de las ecuaciones discretizadas elemento por elemento, y solución de las ecuaciones discretizadas (Chaudhry, 1998).

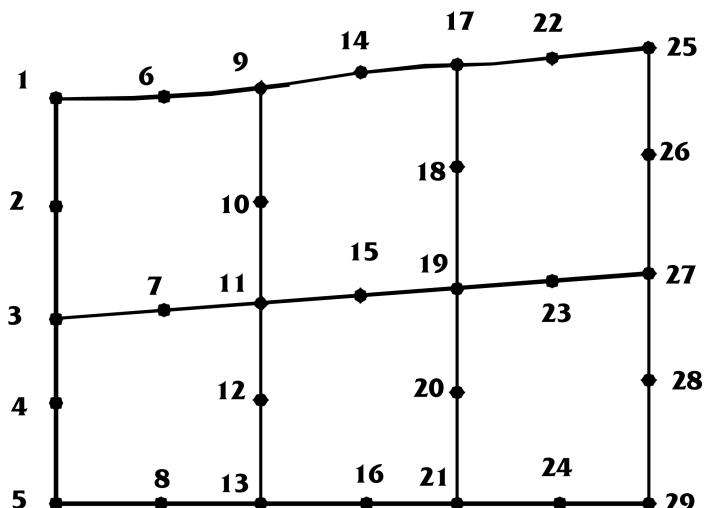
El dominio de la solución del FEM se divide

en una malla de elementos. Estos elementos se componen de patrones de puntos de malla (nodos). Las variables y parámetros de cada ecuación diferencial son interpolados dentro de cada elemento mediante un polinomio. Los elementos finitos pueden ser uni-, bi- o tridimensionales. En este artículo solo son considerados los elementos bidimensionales, tal como muestra la *Figura 4*.

Figura 4.



(a) Coordenadas locales y globales en un elemento cuadrangular lineal (Referencia: Chaudhry, 1993).



(b) Malla de elementos finitos (Referencia: Chaudhry, 1993).

La forma de los elementos finitos bidimensionales es generalmente triangular o rectangular, aunque pueden ser añadidos nodos adicionales para así crear elementos de orden superior con una mayor velocidad de cambio de las variables. Las funcio-

nes de forma pueden ser lineales, cuadráticas o de orden superior. Las funciones lineales pueden usarse cuando los elementos son suficientemente pequeños. Se requiere una transformación de coordenadas para pasar de coordenadas locales a coordenadas globales para los elementos cuadrangulares. Son preferibles las funciones de forma de orden superior cuando las variables cambian rápidamente. Se usan interpolaciones mixtas para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes. La velocidad se interpola mediante una función de forma cuadrática mientras que la presión se interpola dentro del mismo área usando una función de forma lineal, dado que el uso de interpolaciones de igual orden da lugar a un conjunto de ecuaciones irresolubles (Chaudhry, 1993, 1998). Las condiciones de completitud y compatibilidad han de satisfacerse de modo que el método de elementos finitos converja a la solución correcta (Lee & Froehlich, 1986).

Las ecuaciones diferenciales han de ser transformadas en ecuaciones integrales para poder ser resueltas. Se dispone de tres aproximaciones de elementos finitos para este fin: directa, variacional y por el método de los residuos ponderados. Los métodos de residuos ponderados son generales y funcionan correctamente cuando los otros métodos fallan. El método de Galerkin es el más ampliamente usado de todos los métodos de residuos ponderados. Dicho método fuerza a que el error de aproximación sea cero (detalles en Chaudhry, 1993).

Stockstill et al. (1997) aplicaron la técnica de elementos finitos para resolver las ecuaciones de Saint-Venant no estacionarias promediadas verticalmente en forma conservativa en canales de alta velocidad teniendo en cuenta las tensiones turbulentas:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + H = 0 \quad (22)$$

$$Q = \begin{bmatrix} h \\ p \\ q \end{bmatrix}, \quad F_x = \begin{bmatrix} p \\ \frac{p^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 - \frac{h}{\rho}\sigma_{xx} \\ \frac{pq}{h} - \frac{h}{\rho}\sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$F_y = \begin{bmatrix} p \\ \frac{pq}{h} - \frac{h}{\rho}\sigma_{xy} \\ \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 - \frac{h}{\rho}\sigma_{xy} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ gh\frac{\partial z_0}{\partial x} + g\frac{n^2 p \sqrt{p^2 + q^2}}{C_0^2 h^{\frac{7}{3}}} \\ gh\frac{\partial z_0}{\partial y} + g\frac{n^2 q \sqrt{p^2 + q^2}}{C_0^2 h^{\frac{7}{3}}} \end{bmatrix}$$

en donde  $p$  y  $q$  son el caudal por unidad de ancho en las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente,  $C_0$  es 1.0 en el SI, y 1.486 en las unidades U.S. usuales,  $y$  ( $\sigma$ ) son las tensiones turbulentas. Las ecuaciones determinantes para un sistema fijo de coordenadas fueron expresadas en términos de un marco de referencia móvil definiendo un nuevo conjunto de variables independientes ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\tau$ ) como sistema coordenado móvil relacionado con el sistema de referencia fijo ( $x$ ,  $y$ ,  $t$ ). La derivada temporal de las variables  $Q$  del flujo evaluada en el sistema de referencia móvil es:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} = \frac{\partial Q}{\partial t} + u_r \frac{\partial Q}{\partial x} + v_r \frac{\partial Q}{\partial y} \quad (24)$$

donde  $u_r$  y  $v_r$  son las velocidades en el sistema de referencia móvil en las direcciones  $x$  e  $y$ . Sustituyendo en (22) se obtiene:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} + \frac{\partial F_x^*}{\partial x} + \frac{\partial F_y^*}{\partial y} + H + Q \left( \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial v_r}{\partial y} \right) = 0 \quad (25)$$

en la que  $F_x^* = F_x - u_r Q$  y  $F_y^* = F_y - v_r Q$ .

Stockstill et al. (1997) usaron la formulación de Petrov-Galerkin, que incorpora una combinación del test de función de Galerkin y un componente no de Galerkin para controlar las oscilaciones numéricas. La velocidad de referencia se tomó como la velocidad de la malla  $V_r = V_g = (u_g, v_g)$ , siendo calculada a partir del nivel de desplazamiento nodal. La geometría y las variables se interpolan usando funciones base de Lagrange:

$$Q(x, y, \tau) = \sum_j \phi_j(x, y) Q_j(\tau) \quad (26)$$

$$s(x, y, \tau) = \sum_j \phi_j(x, y) s_j(\tau)$$

donde  $\phi$  es la función base,  $j$  es la posición del nodo y  $s$  es el vector desplazamiento del nodo, definiendo como:

$$s = |s| \theta = (|s| \theta_x, |s| \theta_y) \quad (27)$$

siendo  $|s|$  el módulo del vector desplazamiento y  $\theta$  el vector unitario. Una forma simplificada de la ecuación para elementos finitos es:

$$\sum_e \left( \int_{\Omega_e} \left\{ \psi_i \frac{\partial Q}{\partial \tau} - F_x^* \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - F_y^* \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \varphi_i \left( \frac{\partial F_x^*}{\partial x} + \frac{\partial F_y^*}{\partial y} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \psi_i \left[ H + \left( \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) Q \right] \right\} d\Omega_e + \right. \\ \left. \oint_e \phi_i (F_x^* n_x + F_y^* n_y) d\Gamma_e \right) = 0 \quad \text{para cada } i \quad (28)$$

en la que  $e$  indica un elemento dado,  $I$  indica un nodo dado y  $n=(n_x, n_y)$  es el vector unitario dirigido perpendicularmente hacia el exterior del contorno  $\Gamma_e$ . La función de prueba se define como:

$$\Psi_i = \phi_i I + \varphi_i \quad (29)$$

donde  $\phi_i$  es el término de Galerkin,  $\varphi_i$  es el término no de Galerkin y  $I$  es la matriz unidad.

Stockstill et al. (1997) simplificaron la ecuación (28) desarrollando los términos de la matriz de la cantidad de movimiento y evaluando las derivadas de  $F_x^*$  y  $F_y^*$  con respecto a  $s$ . Después de estas operaciones, la descripción simplificada en elementos finitos de las ecuaciones para aguas someras se transforma en:

$$\sum_e \left( \int_{\Omega_e} \left\{ \Psi_i \left( \frac{\partial Q}{\partial \tau} + H \right) - F_x^* \frac{\partial \phi_i}{\partial x} - F_y^* \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \varphi_i G + \psi_i \left( A^* \frac{\partial Q}{\partial x} + B^* \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right\} d\Omega_e + \int_e \phi_i (F_x^* n_x + F_y^* n_y) d\Gamma_e \right) = 0 \quad \text{para cada } i \quad (30)$$

con

$$G = \left( \frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \right) Q \quad (31)$$

Debe señalarse que el modelo se reduce a una formulación de elementos finitos de malla fija convencional si los nodos no se mueven. Además, se usaron diferencias finitas implícitas para aproximar las derivadas temporales del vector de variables  $Q_i$ . El sistema resultante de ecuaciones no lineales se resuelve utilizando el método iterativo de Newton-Raphson. Los dominios del calado, la velocidad y el flujo son resueltos simultáneamente. Las coordenadas de los nodos móviles son actualizadas en cada iteración, de manera que el jacobiano de Newton-Raphson para el desplazamiento nodal se derive adecuadamente. Aunque este modelo fue desarrollado para la simulación del flujo bidimensional en canales trapezoidales de alta velocidad, la formulación por elementos finitos puede aplicarse al flujo con gradientes fuertes usando las condiciones de contorno apropiadas.

### Método de los Volúmenes Finitos

El método de los volúmenes finitos (FVM) es considerado como una técnica relativamente nueva

para resolver las ecuaciones determinantes en la forma de derivadas parciales. Según fue discutido por Tan (1992), Zhao et al. (1994) y Zhao et al. (1996), el FVM presenta algunas ventajas respecto a los otros métodos (MOC, FDM y FEM). Puede ser aplicado a cualquier malla sin estructura predefinida, al igual que el FEM, pero requiere menos esfuerzo de cálculo que el FEM. En el FVM, se puede construir fácilmente un esquema de manera que tenga en cuenta ondas de choque y frentes de onda pronunciados, ya que está basado en la forma integral de las ecuaciones de conservación. El FVM trata los problemas bidimensionales como una serie de problemas unidimensionales locales, dando lugar a un simple, pero preciso, algoritmo de cálculo eficiente, Zhao et al. (1996).

En la formulación de volúmenes finitos, las ecuaciones de discretización (que son las algebraicamente opuestas a las ecuaciones diferenciales) se derivan por integración de las ecuaciones diferenciales de gobierno en una pequeña región del flujo llamada volumen finito (FV) o volumen de control (CV). Las variables dependientes, tales como la velocidad o la presión, son evaluadas en puntos discretos, a cada uno de los cuales se le asocia un volumen de control. Tales puntos se denominan puntos de malla. El dominio del flujo debe ser subdividido en volúmenes de control y han de definirse los puntos de malla asociados. La Figura 5 muestra una malla de volumen finito para un dominio rectangular bidimensional. Las líneas a trazos representan las caras de los volúmenes de control, teniendo cada uno su punto de malla correspondiente, que usualmente se sitúa en el centro geométrico del elemento de volumen finito. Cada punto de malla se comunica con el resto de puntos de la vecindad (E, W, N y S) a través de las cuatro caras del volumen de control. Como se ha dicho antes, las ecua-

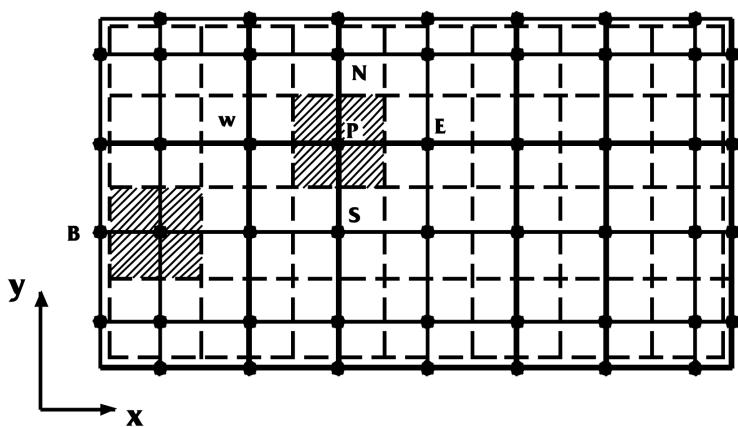


Figura 5. Volúmenes de control y malla (Referencia: Chaudry, 1998).

ciones diferenciales de gabinete deben ser transformadas en ecuaciones algebraicas mediante la integración en todo el volumen de control. Las ecuaciones resultantes son las denominadas ecuaciones de discretización, las cuales relacionan las variables independientes en cada punto de malla con las de los puntos vecinos. Las ecuaciones de discretización constituyen un conjunto de ecuaciones lineales, o al menos nominalmente lineales, con los valores de las variables dependientes en los puntos de malla como desconocidas. Las ecuaciones pueden ser resueltas por un método directo, como la eliminación Gaussiana para problemas unidimensionales y por método iterativo para problemas bidimensionales y tridimensionales (Patankar et al. 1998).

Zhao et al (1996) aplicaron el FVM para resolver las ecuaciones determinantes de problemas bidimensionales con calados pequeños y compararon tres métodos diferentes de resolución. Las ecuaciones determinantes bidimensionales en forma conservativa para aguas poco profundas fueron expresadas como:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f(q)}{\partial x} + \frac{\partial g(q)}{\partial y} = b(q) \quad (32)$$

$$U = \begin{bmatrix} h \\ uv \\ vh \end{bmatrix}, \quad f(q) = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}gh^2 \\ uvh \end{bmatrix}, \quad (33)$$

$$g(q) = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, \quad b(q) = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{ox} - S_{fx}) \\ gh(S_{oy} - S_{fy}) \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones determinantes fueron integradas sobre un elemento arbitrario  $\Omega$ , siendo obtenida la siguiente ecuación base al aplicar el teorema de la divergencia:

$$\iint_{\Omega} q_t d\omega = - \int F(q) \cdot n dL + \iint_{\Omega} b(q) \cdot d\omega \quad (34)$$

en la que  $n$  es el vector unitario normal a la superficie  $\partial\Omega$ , y  $d\omega$  y  $dL$  son los elementos de área y arco respectivamente. El vector desconocido  $q$  se supone que es constante sobre el elemento tomando precisión hasta primer orden. Discretizando la ecuación (34) se obtiene la función base del FVM:

$$A \frac{dq}{dt} = - \sum_{j=1}^m F_n^j(q) L^j + Ab(q) \quad (35)$$

donde  $A$  es el área del elemento,  $m$  es el número total de caras del mismo,  $j$  es el índice para cada cara del elemento,  $L^j$  es la longitud de la cara  $j$ -ésima del elemento y  $b(q)$  el término fuente. Basándose en la propiedad de invariancia rotacional de  $f(q)$  y  $g(q)$ , en cada cara de los elementos, Spekreijse (1988) derivó la siguiente relación:

$$F_n(q) = T(\Phi)^{-1} f(\bar{q}) \quad (36)$$

siendo  $\Phi$  el ángulo entre el vector  $n$  y el eje  $x$  medido en el sentido antihorario desde el eje  $x$  (ver Figura 6), y  $T(\Phi)$  y  $T(\Phi)^{-1}$  son las matrices de transformación y su inversa respectivamente. La ecuación (35) puede ser escrita en la forma:

$$A \frac{dq}{dt} = - \sum_{j=1}^m T(\Phi)^{-1} f(\bar{q}) L^j + Ab(q) \quad (37)$$

Zhao et al. (1996) aplicaron tres tipos de resolviódores de Riemann para solucionar las ecuaciones determinantes discretizadas obtenidas de la formulación del FVM. Estos tres resolviódores son: Separación del Vector de Flujo FVS (Steger & Warming, 1981), Separación de Diferencia de Flujo FDS (Roe 1981, y Glaisster 1988), y el modelo de Oscher (Oscher & Solomone 1982, Spekreijse 1988, Tan 1992, y Zhao et al. 1994). Los detalles de estos modelos de resolución pueden ser consultados en Zhao et al. (1996).

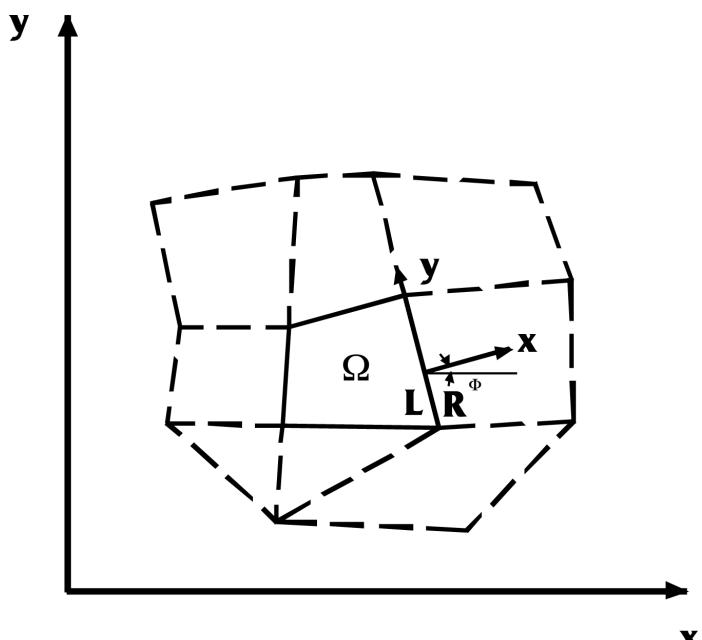


Figura 6. Geometría del volumen finito (Referencia: Zhao et al., 1996).

## Condiciones iniciales y de contorno

Las técnicas numéricas previamente expuestas determinan las incógnitas en los puntos de malla interiores. Pero la solución ha de ser especificada en los contornos. La solución numérica de cualquier problema requiere la definición de la solución en el dominio del contorno, que es lo que se denomina condiciones de contorno. Así mismo, se requiere una solución inicial a partir de la cual comenzar el cálculo. Esto es lo que se llama la condición inicial. El éxito de cualquier aplicación numérica depende de la selección de las condiciones iniciales y de contorno apropiadas para el problema en cuestión. Cualquier error introducido en los contornos es propagado y reflejado a través del dominio de cálculo.

Las condiciones iniciales especifican todas las incógnitas en todos los puntos de malla para el instante inicial de tiempo. Para un flujo no estacionario bidimensional, los calados y velocidades del flujo ( $h$ ,  $u$  y  $v$ ) han de ser especificadas en todos los puntos de malla. Estos valores pueden ser deducidos a partir del análisis del flujo estacionario.

Las condiciones de contorno se definen de acuerdo con el problema simulado. Cada problema de flujo tiene unas condiciones de contorno únicas. El contorno de pared sólida debe ser especificado para todos los problemas de flujo. Considerando los lados del canal como sólidos, (p.e., despreciando la erosión o la sedimentación en el caso de cauces naturales con contornos erosionables), la condición de no deslizamiento se usa como condición de contorno para una pared sólida.

Debe destacarse que es muy frecuente simular la mitad del sistema simétrico por medio de un contorno apropiado situado en un plano de simetría. El contorno simétrico es similar a la condición de pared sólida en el sentido de que la velocidad normal respecto al plano de simetría es igual a 0, pero la condición de no deslizamiento no es aplicable en ese caso. Se requiere que los gradientes perpendiculares de todas las variables con respecto al plano de simetría se anulen.

## APLICACIONES TÍPICAS

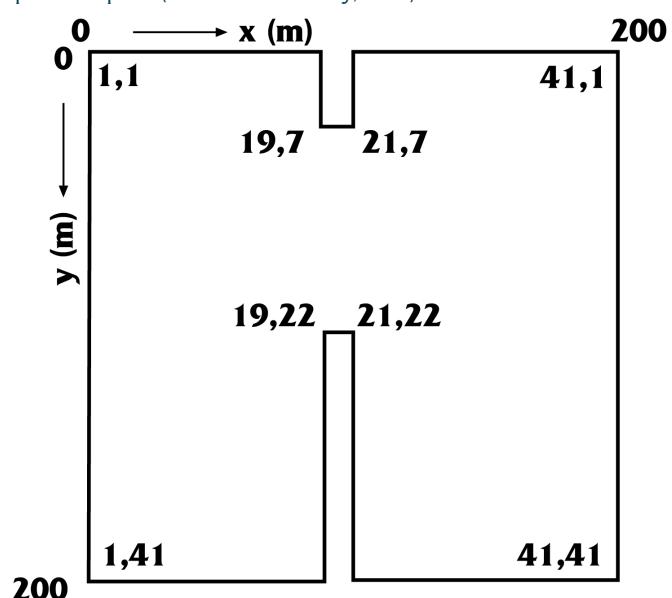
La mayor parte del material de esta sección esta tomado de publicaciones relevantes, tal y como se indica en cada subsección.

### Flujo de rotura de presa

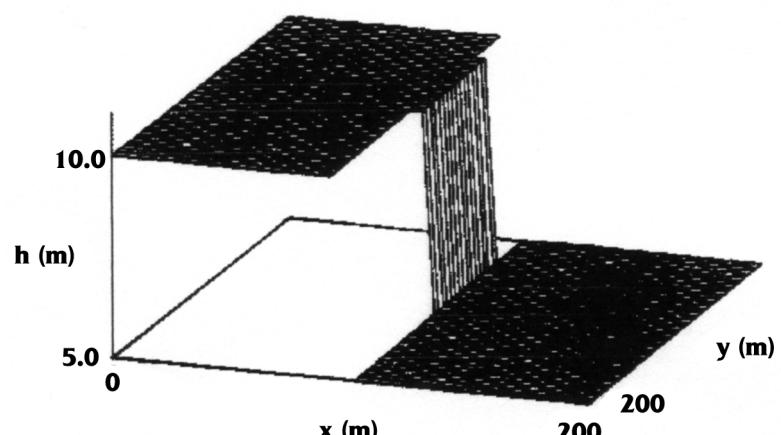
El problema de hipotética rotura de una presa

fue resuelto por Fennema & Chaudhry (1990) usando el FDM y por Zhao et al. (1996) usando el FVM. El dominio de cálculo esta formado por un canal de 200m de largo y 200m de ancho. La rotura está elegida intencionadamente para que nos sea simétrica, con 75m de ancho para así demostrar que el análisis es general.. Se supone que la presa tiene un calado finito (10m en la dirección del flujo). Los contornos se toman paralelos a los ejes coordenados. El fallo de la presa se supone instantáneo. Se considera que el cauce de aguas abajo tiene un calado finito. Esto es lo más usual en aplicaciones en las que un control aguas abajo mantiene el cauce con agua. El cauce seco puede ser simulado usando un calado muy pequeño. La Figura 7 muestra el esquema de definición y las condiciones iniciales del problema.

Figura 7. Esquema de definición y condiciones iniciales para la rotura parcial de presa (Referencia: Chaudhry, 1993).



(a) Esquema de definición



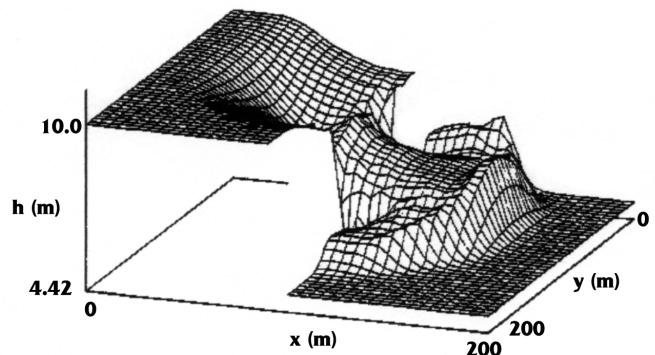
(b) Condiciones iniciales

Fennema & Chaudhry (1990) resolvieron el problema descrito usando el FDM. A tal efecto se usó el modelo de MacCormack para tal propósito. La esquina con ángulo de  $90^\circ$  impone una condición muy severa en los modelos y en los contornos. Debe señalarse que las ecuaciones de gabinete pueden no ser válidas en las cercanías del bore formado debido a las fuertes curvaturas. No obstante, los resultados obtenidos, tales como los niveles máximos de agua, tiempo de llegada de la onda, etc., pueden ser usados con una cierta seguridad para aplicaciones típicas de ingeniería, incluso aunque los detalles del bore en sí mismo no sean modelados de manera rigurosa. La malla es de 41 por 41 puntos, lo que da lugar a un tamaño de malla individual de 5m por 5m. Para evitar cualquier amortiguamiento en los términos fuente se usó un canal horizontal sin fricción, y las condiciones iniciales presentaban una relación nivel aguas abajo/embalse de 0.5 en las primeras iteraciones. Las condiciones del flujo fueron analizadas para un amplio rango de los parámetros de flujo, tales como pérdidas por fricción (coeficiente de Manning entre  $n=0$  y  $n=0.15$ ), suponiendo un canal inclinado (pendiente del fondo entre 0 y 0.07), diferentes relaciones calados/profundidad de embalse, rotura simétrica y asimétrica, etc.

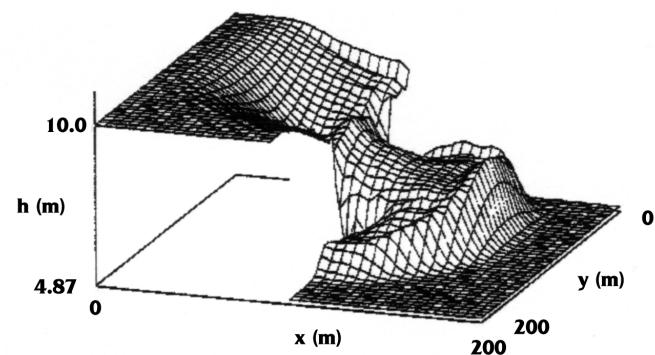
Las condiciones de flujo se calcularon para 7.1 segundos tras la rotura de la presa. En ese instante, el bore está bien desarrollado en la parte central del cauce de aguas abajo, y el frente de onda ha alcanzado una de las riberas del canal. Se presentan solamente los resultados de una simulación para ahorrar espacio, correspondientes al final del intervalo de simulación.

Se usan dos tipos de figuras para presentar los resultados. El primer tipo es un gráfico en perspectiva de la superficie del agua en el que la escala vertical ha sido aumentada con respecto a la horizontal. El segundo tipo corresponde a la representación del vector velocidad. En cada nodo, la velocidad se representa por una flecha cuya longitud indica la magnitud del vector (no son representadas velocidades inferiores a una tolerancia específica). La Figura 8 (a y b) muestra las vistas en perspectiva de la superficie del agua en el caso de condiciones de contorno correspondientes a rotura simétrica y asimétrica. El perfil cerca de los contornos, especialmente en la zona del embalse, ilustra la diferencia entre las dos condiciones de contorno. Pueden observarse las oscilaciones debidas a errores de dispersión. La solución puede suavizarse mediante la adición de viscosidad artificial sin que

Figura 8. Resultados del problema de rotura de presa usando el modelo de MacCormack (Referencia: Fennema & Chaudhry, 1990).

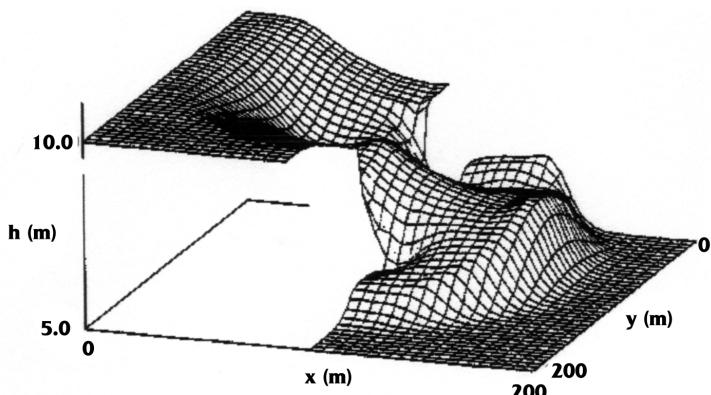


(a) Condición de contorno asimétrica sin viscosidad artificial



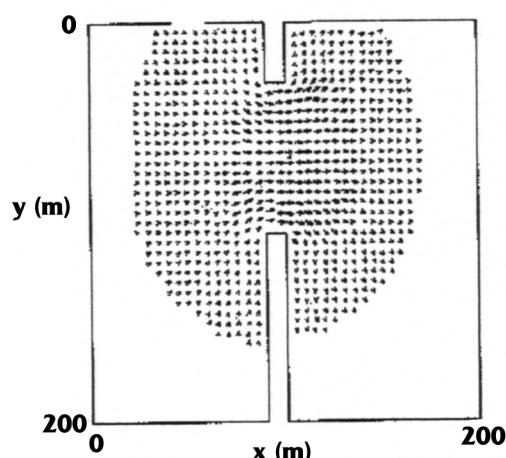
(b) Condición de contorno simétrica sin viscosidad artificial

por ello se vea afectada la calidad del perfil (Figura 8-c). La Figura 8-d muestra los vectores velocidad calculados. Además de eliminarse las oscilaciones en las cercanías del bore, la viscosidad artificial reduce la separación cerca de las esquinas bruscas.



(c) Condición de contorno simétrica con viscosidad añadida

Zhao et al. (1996) resolvieron el mismo problema que Fennema & Chaudhry (1990) usando el FVM. La malla consistía en una malla rectangular de 40 x 40 elementos y el paso computacional de tiempo era de 0.2 segundos. Las Figuras 9 y 10



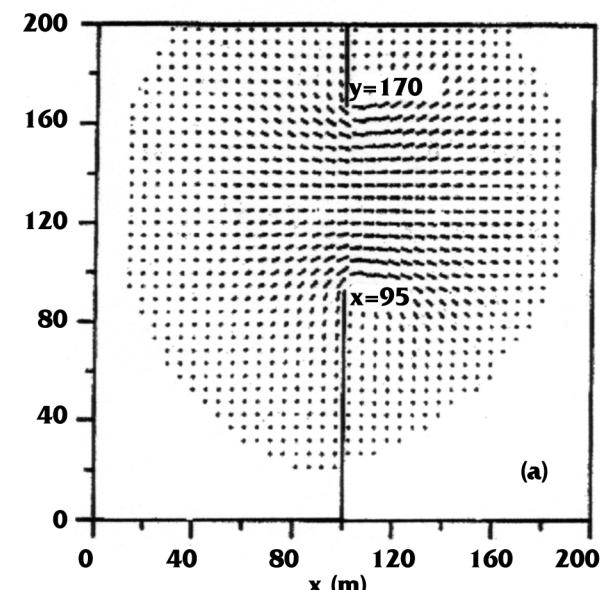
(d) Campo de velocidades del flujo

muestran las perspectivas tridimensionales del perfil superficial del agua y los gráficos del campo de velocidades respectivamente, para los tres tipos de resolviédores de Riemann (FVS, FDS, y el modelo de Osher) al final del intervalo de simulación (7.2 segundos después de la rotura de la presa). Los resultados están en total acuerdo con los obtenidos por Fennema & Chaudhry (1990), y también con los de Alcrudo & Garcia-Navarro (1993).

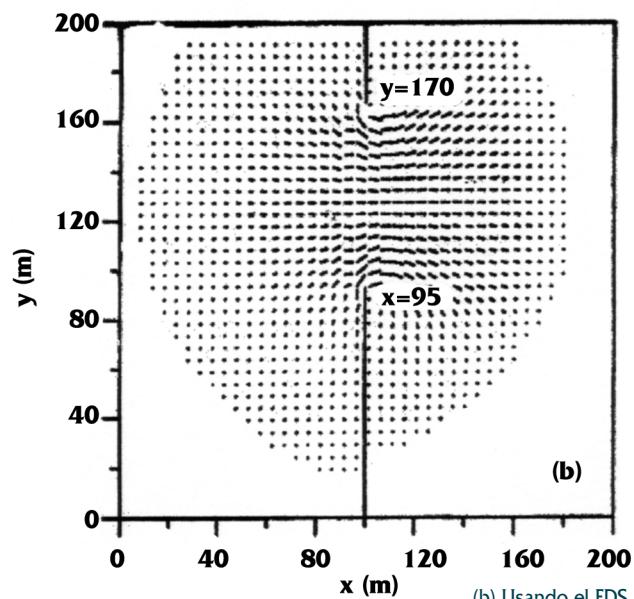
#### Simulación del resalto hidráulico

Gharangik & Chaudhry (1991) simularon un resalto hidráulico en un canal rectangular usando el FDM. Resolvieron las ecuaciones de Boussinesq mediante el modelo 2-4 desarrollado por Gottlieb & Turkel (1976). Las ecuaciones de Boussinesq son

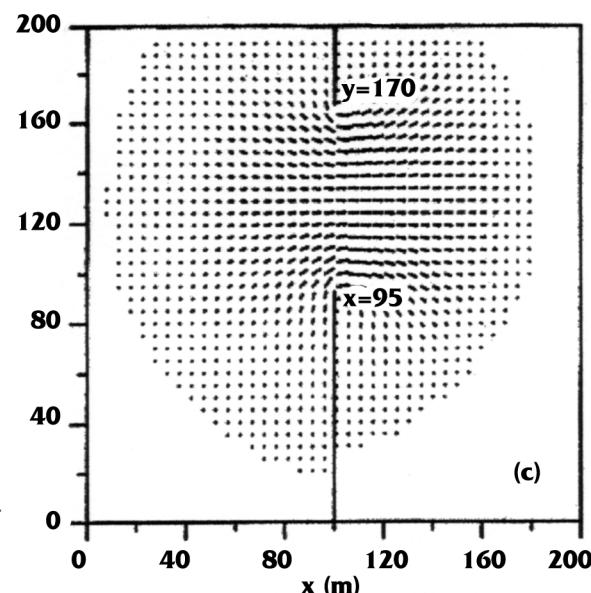
Figura 9. Campo de velocidades para el problema bidimensional de rotura de presa (Referencia Zhao et al. 1996).



(a) Usando el FVS

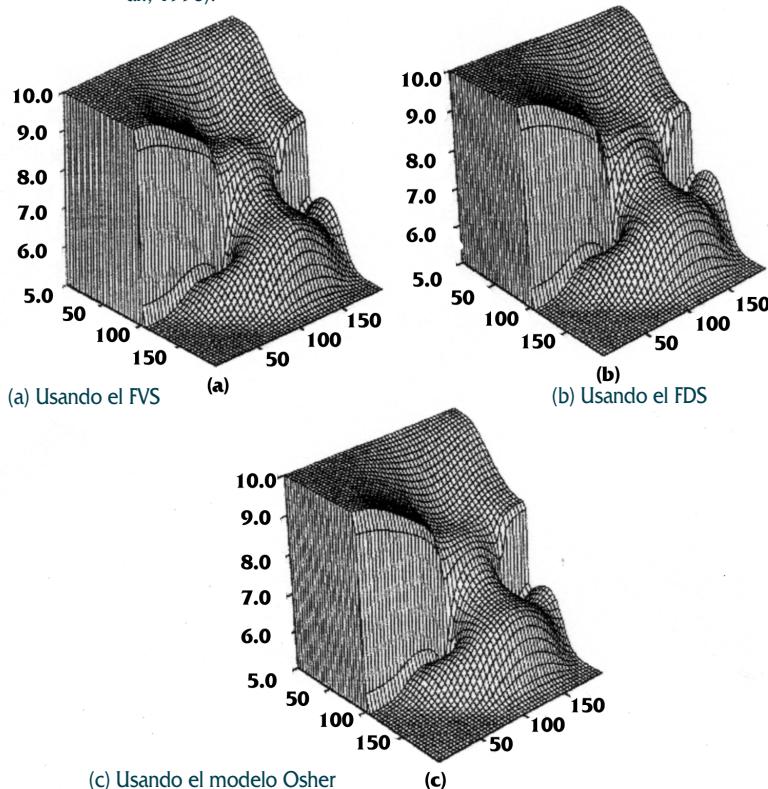


(b) Usando el FDS



(c) Usando el modelo de Osher

Figura 10. Representaciones del contorno y de la superficie tridimensional del agua mostrando la distribución de calados para el problema tridimensional de rotura de presa (Referencia: Zhao et al., 1996).



ecuaciones del flujo gradualmente variado, las cuales incluyen términos adicionales que tiene en cuenta la distribución no hidrostática de presiones. Las condiciones iniciales son consideradas supercríticas en todo el canal. En el contorno de aguas arriba se especifican un calado y una velocidad iguales a sus

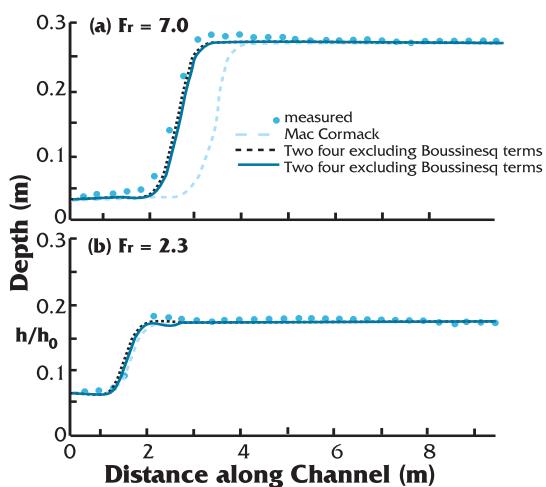


Figura 11. Niveles de agua calculados y medidos para el resalto hidráulico (Referencia: Gharangif & Chaudhry, 1991).

(a)  $Fr = 7.0$   
(b)  $Fr = 2.3$

respectivos valores iniciales, manteniendo constante su valor a lo largo de todo el cálculo. En el contorno de aguas abajo se toma un calado constante. El tamaño del paso de tiempo fue restringido mediante la condición de estabilidad de Courant. La *Figura 11* muestra una comparación entre los resultados medidos y calculados. En ella se aprecia que los modelos numéricos de cuarto grado de precisión, con o sin los términos de Boussinesq, proporcionan aproximadamente el mismo resultado para todos los números de Froude ensayados.

Thompson (1990) resolvió las ecuaciones del flujo en aguas someras para analizar el flujo bidimensional estacionario en un resalto hidráulico usando el FEM. La *Figura 12* muestra los resultados y la malla de 9 nodos. El acuerdo entre los resultados medidos y calculados es satisfactorio, pero el frente del resalto calculado no resultó tan acusado como el medido. La viscosidad artificial debe ser incluida en la solución para que converja. Viscosidades artificiales menores dan lugar a resaltos más acusados y por tanto generan mejores resultados.

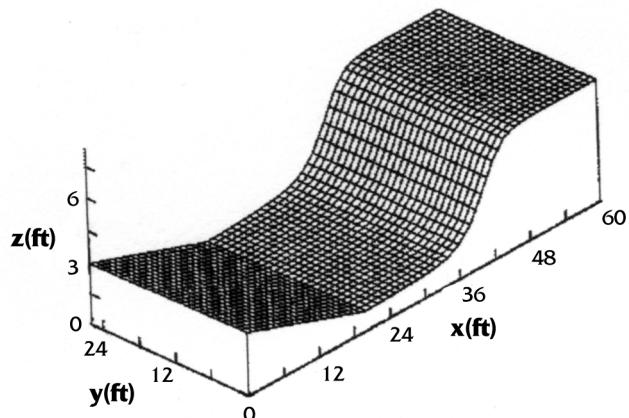


Figura 12. Resalto hidráulico en canal rectangular (referencia: Thompson, 1990).

### Simulación del resalto hidráulico circular

Younus & Chaudhry (1994) simularon numéricamente un resalto hidráulico circular mediante un modelo  $\kappa-\epsilon$  para poder incluir las tensiones turbulentas. La única diferencia de este tipo de solución es que el flujo radial requiere contornos espaciales periódicos en uno de los ejes de cálculo. Younus (1993) presentó los detalles de este proceso. El régimen de flujo simulado comenzaba a 0.0817m del centro del chorro, donde el calado era de 0.0082m. Los valores iniciales de U y V fueron obtenidos a partir de la ecuación de continuidad para

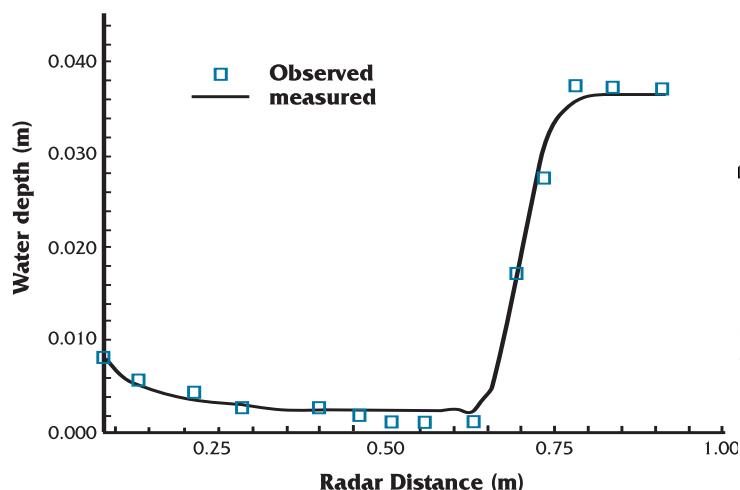


Figura 13. Perfil de calados calculados y medidas para resalto hidráulico circular (Referencia: Younus & Chaudhry, 1994).

un caudal de  $0.017\text{m}^3/\text{s}$ . En el extremo de aguas arriba se especificaron todos los valores de las variables ( $h$ ,  $U$ ,  $V$ ,  $\kappa$  y  $\epsilon$ ), mientras que en el de aguas abajo se especificaron  $U$  y  $V$ , los cuales mantenían constante sus valores respectivos durante todo el cálculo, si bien  $h$ ,  $\kappa$  y  $\epsilon$  fueron extrapolados a partir de los puntos interiores. El paso computacional de tiempo  $\Delta t$  quedaba restringido por el número de Courant. La malla computacional era  $49 \times 30$  y el modelo fue ejecutado hasta que se alcanzó un régimen estacionario. Los resultados del cálculo fueron comparados con medidas experimentales (Ahmad, 1967) y se muestran en la *Figura 13*. La vista tridimensional de la superficie del agua se muestra en la *Figura 14*.

Figura 15. Malla, vista en planta, contorno y representaciones mostrando las distribuciones de calado en el resalto hidráulico oblicuo (Referencia: Zhao et al., 1996).

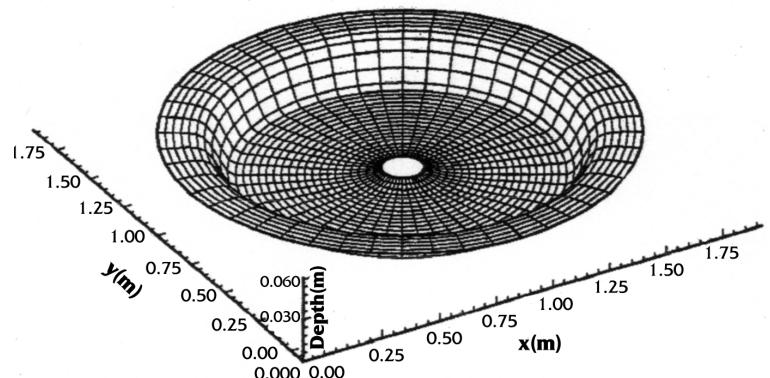
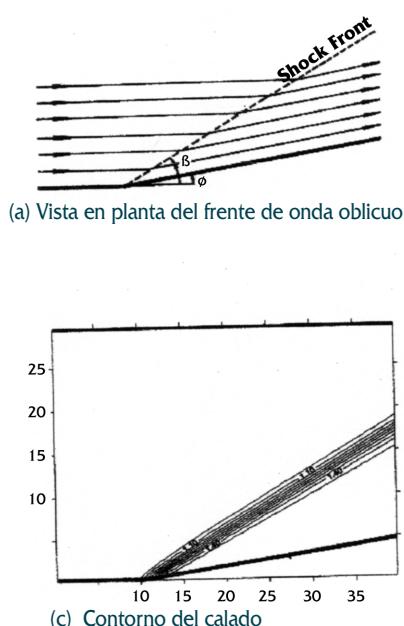
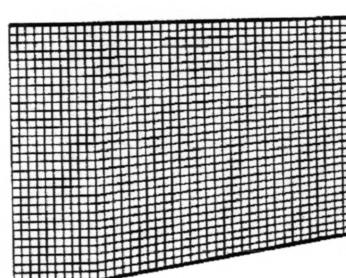


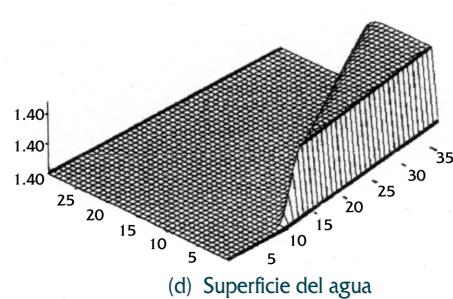
Figura 14. Vista tridimensional del resalto hidráulico circular (Referencia Younus & Chaudhry, 1994).

## Resalto hidráulico oblicuo

Zhao et al (1996) simularon un resalto hidráulico oblicuo por medio del FVM. El resalto hidráulico oblicuo se forma por la interacción entre un flujo supercrítico y una pared convergente deflectada un ángulo  $\theta$ . La onda de choque se forma con un ángulo  $\beta$ , tal como muestra la *Figura 15-a*. Se utilizó una malla no rectangular de  $60 \times 80$  para representar el canal convergente, siendo el ángulo de la pared  $\theta=8.95^\circ$ , según se muestra en la *Figura 15-b*. La condición inicial era un flujo supercrítico uniforme con número de Froude igual a 2.74. Las condiciones de contorno para el régimen supercrítico se especificaron en el extremo de aguas arriba. El cálculo convergía al régimen estacionario para esas condiciones iniciales y de contorno. Los resultados



(b) Malla



se recogen en la *Tabla 1*. El calado del agua y los perfiles superficiales obtenidos con el FVM están representados en las *Figuras 15-c* y *15-d*. Las diferencias entre los resultados y la solución exacta resultan inferiores al 2%. La diferencia en el ángulo de la onda de choque se sitúa en torno al 0.5%.

Tabla 1. Resultados para resalto hidráulico oblicuo  
(Referencia: Zhao et al. 1996).

Modelo	Velocidad del frente (m/s)	Altura del frente (m)	Ángulo de la onda de choque	Número de Froude
<b>FVS</b>	7.952	1.497	30.14	2.075
<b>FDS</b>	7.944	1.502	29.98	2.070
<b>Osher</b>	7.950	1.498	30.12	2.074
<b>Exacto</b> (tomado de Hager et al. (1994))	7.953	1.500	30.00	2.074

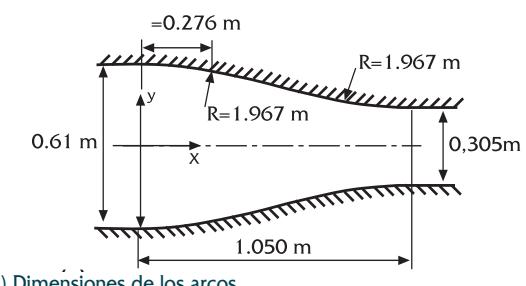
### Flujo supercrítico en contracción simétrica

Jiménez & Chaudhry (1988) compararon los resultados medidos para el flujo en una contracción compuesta por arcos circulares (*Figura 16-a*), y los resultados del cálculo utilizando el FDM. Los resultados aquí recogidos corresponden a un número de Froude inicial igual a 4.0. Se consideró un calado constante y una velocidad distribuida uniformemente en la sección de aguas arriba, utilizándose una malla de 21 puntos. Se uso una condición de contorno simétrica, simulándose la mitad del campo de flujo. En la longitud de contracción se encontró un buen acuerdo entre el calado de agua calculado y medido, pero aguas abajo de la transición la diferencia entre resultados calculados y medidos se hizo más acusada. La predicción para los niveles máximos de agua no resultó satisfactoria, debido a que se usaron valores grandes de la relación calado/anchura y a la presencia de perturbaciones.

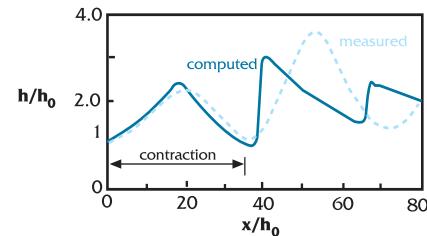
Bhallamudi & Chaudhry (1992) compararon los resultados medidos y calculados para una contracción simétrica con pared recta. Los datos del laboratorio fueron aportados por Ippen et al (1951). El número de Froude aguas arriba era igual a 4.0. Los cálculos fueron hechos utilizando coordenadas transformadas. El coeficiente de disipación era igual a 0.80, el número de Courant igual a 0.8 y el factor de fricción a lo largo de las paredes y fondo del canal se supuso nulo. Las condiciones iniciales, calado y velocidad del flujo, se especifican en el extremo de aguas arriba, no indicándose condición alguna para el extremo de aguas abajo. Se obtiene un buen acuerdo entre el perfil superficial del agua

medido y calculado a lo largo de las paredes y en la línea central del canal, donde el flujo es suave. No ocurre lo mismo en la línea central del perfil superficial cerca de las fuertes ondas de choque. El nivel máximo calculado queda cerca del valor medido, pero hay una diferencia significativa en lo que a posición se refiere. Los resultados pueden ser usados con seguridad para diseños prácticos, pero no son precisos desde el punto de vista académico. El desacuerdo entre los resultados medidos y calculados en la línea central puede ser debido a la consideración de distribución hidrostática de presiones, la cual no es válida cerca de frentes de onda bruscos.

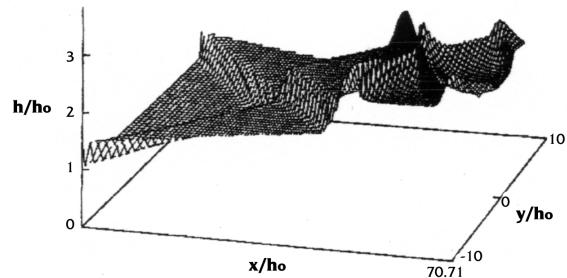
Figura 16. Simulación del flujo en una contracción por arcos circulares (Referencia: Jiménez & Chaudhry, 1988).



(a) Dimensiones de los arcos

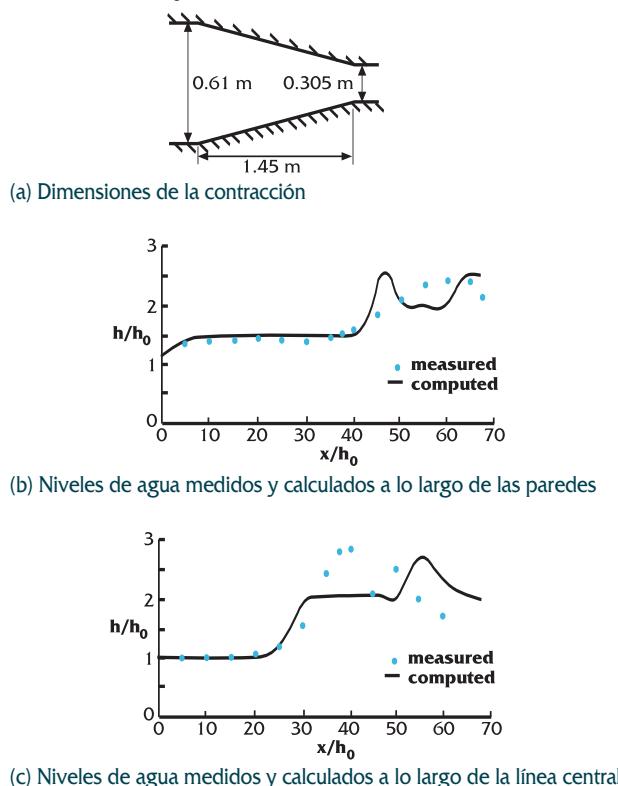


(b) Calados de flujo calculados y medidos.



(c) Representación tridimensional de la superficie de agua calculada

Figura 17. Flujo supercrítico en una contracción (Referencia: Bhallamudi & Chaudhry, 1992).



## REFERENCIAS

- Akanbi, A. A., and Katopodes, N. D., Model for Flood Propagation on Initially Dry land, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, vol. 114, no. 7, pp. 689, 706, 1988.
- Alcrudo, F., and Garcia-Navarro, P., A High-Resolution Godunov-Type Scheme in Finite Volumes for the 2-D shallow Water Equations, *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, vol. 16, pp 489-505, 1993.
- Anderson, D. A., Tannehill, J. D., and Pletcher, R. H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, McGraw Hill, New York, 1984.
- Bagge, G., and Herbich, J. B., Transitions in Supercritical Open Channel Flow, *Journal of Hydraulic Division, ASCE*, Vol. 93, No. 5, pp. 23-41, 1967.
- Baker, J. A., Finite Element Computational Fluid Dynamics, McGraw Hill, New York, NY, 1983.
- Basco, D. R., Introduction to Rapidly Varied Unsteady Free Surface Flow Computations, *Water Resources Investigation Report*, No. 83-4284, 1983.
- Beam, R. M., and Warming, R. F., An Explicit Finite-Difference Algorithm for Hyperbolic Systems in Conservation-Law Form, *Journal of Computational Physics*, vol. 22, pp. 87-110, 1976.
- Bellos, C. V., Soulis, J. V., and Sakkas, J. G., Computation of two-Dimensional Dam-Break induced Flows, *Advances in Water Resources*, vol. 14, no. 1, 31-41, 1991.
- Berger, R. C. Jr., A Finite Element Scheme for Shock Capturing, *Technical Report, TR-93-12*, U.S. Army Engineering Waterway Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, 1993.
- Berger, R. C., and Stockstill, R. L., Finite Element Model for High-velocity Channels, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, vol. 121, no. 10, pp. 710-716, 1995.
- Bhallamudi, S. M., and Chaudhry, M. H., Computation of Flows in Open-Channel Transitions, *Journal of Hydraulic Research*, vol. 1, pp. 77-93, 1992.
- Chaudhry, M. H., *Applied Hydraulic Transients*, 2nd edition, Van Nostrand Reinhold, New York, N.Y., 1987.
- Chaudhry, M. H., *Open Channel Flow*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1993.
- Chaudhry, M. H., Computation of Open-Channel Flows with Shocks, *7th International Conference on Pressure Surges and Fluid Transients in Pipelines and Open Channels*, Mechanical Engineering Publication Limited, BHR Group, UK, 1996.
- Chaudhry, M. H., and Barber, M. E., *Open Channel Flow, The Handbook of Fluid Dynamics*, Edited by Johnson, R. W., CRC Press, New York, NY, 1998.
- Demuren, A. O., Prediction of Steady Surface-Layer Flows, Ph.D. thesis, University of London, 1979.
- Fennema, R. J., and Chaudhry, M. H., Explicit Methods for Two-dimensional unsteady Transient Free-Surface Flows, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, vol. 116, no. 4, pp. 1013-1034, 1990.
- Garcia, R., and Kahawita, R. A., Numerical Solution of the St. Venant Equations with MacCormack Finite Difference Scheme, *International Journal Numerical Methods in Fluids*, 6, 259-274, 1986.
- Gharangik, A., and Chaudhry, M. H., Numerical Simulation of Hydraulic Jump, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, vol. 117, no. 9, pp. 1195-1211, 1991.
- Herbich, J. B., and Walsh, P., Supercritical flow in Rectangular expansions, *Journal of Hydraulic Division, ASCE*, vol. 98, no. 9, pp. 1691-1700, 1972.
- Jimenez, O.F. and Chaudhry, M. H., Computation of Supercritical free Surface Flows, *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, vol. 114, no. 4, pp. 377-395, 1988.
- Jameson, A., Schmidt, W., and Turkel, E., Numerical Solutions of Euler Equations by Finite Volume Methods using Runge-Kutta time-stepping Schemes, *AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference*, Palo Alto, California, AIAA-81-1259, 1981.
- Katopodes, H., and Strelkoff, T., Computing Two-dimensional Dam-Break Flood Waves, *Journal of the Hydraulics Division, ASCE*, vol. 104, no. 9, pp. 1269-1288, 1978.
- Lee, J. K., and Froelich, D. C., Review of Literature on the Finite Element Solution of the equations of Two-di-

- imensional Surface-Water Flow in Horizontal Plane, Circular:1009 U.S. Geological Survey, Denver, Colorado, USA, 1986.
- Lax, P. D., and Wendroff, B., Systems of Conservation Laws, Com. Pure Applied Mathematics, 13:217-37, 1960.
- Osher, S., and Solomone, F., Upwind difference Scheme for Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Mathematical Computation, 38, pp. 339-374, 1982.
- Patankar, S. V., Karki, K. C., and Kelkar, K. M., Finite Volume Method, The Handbook of Fluid Dynamics, Edited by Johnson, R. W., CRC Press, New York, NY, 1998.
- Pepper, D. W., and Baker, A. J., Finite Differences versus Finite Elements, in Handbook of Numerical Heat Transfer, W. J. Minkowycz, E. M. Sparrow, G. E. Schneider and R. H. Pletcher, Eds, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- Raman, A. and Chaudhry, M. H., Numerical Simulation of Hydraulic Jump, Proceeding, North America Water and Environment Congress 96, ASCE, 1996.
- Stockstill, R. L., Berger, R. C., and Nece, R. E., Two-dimensional Flow Model for Trapezoidal High-velocity Channels, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 123, no. 10, pp. 844-852, 1997.
- Stockstill, R. L., A Two-dimensional Free-surface Flow Model for Trapezoidal High-Velocity Channels, Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, University of Washington, Seattle, Washington, USA, 1995.
- Spekreijse, S. P., Multigrid Solution of Steady Euler Equations, CWI Tract, Amsterdam, The Netherlands, 1988.
- Tan, W., Shallow Water Hydrodynamics, Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1992.
- Thompson, J., Numerical Modeling of Irregular Hydraulic Jumps, Proceeding of Hydraulic Engineering Conference, ASCE, pp. 749-754, 1990.
- Villegas, F., Design of the Punchina Spillway, Water Power Dam Construction, Nov., 32-34, 1976.
- Younus, M., and Chaudhry, M. H., A Depth averaged k-( turbulence Model for the Computation of Free-Surface Flow, Journal of Hydraulic Research, vol. 23, no. 3, pp. 415-444, 1994.
- Zhao, D. H., Shen, H. W., Tabios III, G. Q., Lai, J. S., and Tan, W. Y., A Finite Volume Two-dimensional Unsteady Flow Model for River Basins, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 120, no. 7, pp. 863-883, 1994.
- Zhao, D. H., Shen, H. W., Lai, J. S., and Tabios III, G. Q. Approximate Riemann Solvers in FVM for 2D Hydraulic Shock Wave Modeling, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, vol. 122, no. 12, pp. 692-702, 1996.