

EL MODELADO MATEMÁTICO DE LA PROPAGACIÓN DEL OLAJE EN INGENIERÍA DE COSTAS

Philip L.-F. Liu.¹

Iñigo J. Losada.²

Resumen:

Este artículo presenta un resumen de la evolución de los modelos matemáticos utilizados para el estudio de la propagación del oleaje, concentrándose especialmente en los últimos avances alcanzados. Se presenta, por tanto, un pequeño resumen de los progresos realizados en las dos últimas décadas para luego desarrollar más detalladamente las últimas investigaciones relativas a modelos unificados o modelos basados en las ecuaciones de Navier-Stokes.

Es necesario hacer énfasis en el hecho de que el modelado matemático es tan sólo uno de los aspectos que abarca el estudio de la propagación del oleaje en el campo de la Ingeniería de Costas, dado que otras consideraciones tales como la definición de la batimetría, selección de los datos de partida relativos al clima marítimo, tratamiento de los contornos, etc. condicionan completamente el resultado final. Estos últimos aspectos, muy ligados al binomio modelo-modelador, quedan fuera del alcance de este artículo aunque no deben ser olvidados.

Palabras clave: oleaje, modelos numéricos, Navier-Stokes, Boussinesq, mild-slope.

Introducción

Cualquier estudio de ingeniería de costas o portuaria tal como el diseño de una regeneración de playa o de un puerto requiere la estimación de las condiciones del oleaje en el área de interés. En general, las condiciones de oleaje son conocidas en mar abierto por lo cual es necesario transferir la información disponible, instrumental, visual o de predicción, de alturas y direcciones a la zona de estudio. Por ello, la necesidad de determinar el oleaje de diseño, o de datos para alimentar modelos de transporte de sedimentos o de circulación en la zona de rompientes, ha dado lugar, en las dos últimas décadas, a avances importantes en el modelado de los procesos de transformación de las ondas.

El oleaje de viento generado por una borrasca en mar abierto está formado, generalmente, por componentes abarcando un amplio rango de frecuencias. Las componentes con más altas frecuencias se propagan con una menor celeridad que

aquellas correspondientes a las bajas frecuencias. A medida que éstas se propagan a lo largo de la plataforma continental hacia la costa, las componentes de onda larga lideran el grupo de ondas viajando, a continuación, las ondas de corto período. En profundidades indefinidas las ondas generadas por el viento no se ven afectadas por la batimetría. A partir de que el tren de ondas comienza a propagarse en aguas más someras, éste empieza a refractarse por efecto de la batimetría o de las corrientes o se difracta alrededor de abruptas variaciones del fondo tales como cañones submarinos o bajos. Parte de la energía es reflejada hacia mar abierto. A medida que la propagación continúa en dirección hacia la costa, las ondas pierden parte de su energía por efecto de la fricción en el fondo. A pesar de ello, la amplitud de la onda aumenta y la longitud de onda se va reduciendo dando lugar al peraltamiento de las ondas. Dado que, en profundidades reducidas, la celeridad de la onda es proporcional a la raíz cuadrada

¹ School of Civil and Environmental Engineering, Cornell University, Ithaca, NY, USA

² Grupo de Ingeniería Oceanográfica y de Costas, Universidad de Cantabria, Santander, España

de la profundidad, el frente de la onda se desplaza a una velocidad menor que la cresta de la onda dando lugar a un volteo de la cresta. Este volteo genera usualmente un chorro de agua que se inyecta cerca de la base de la onda dando lugar a una gran salpicadura. La turbulencia asociada a esta rotura de la onda es responsable no sólo de una gran disipación de energía sino también del transporte de sedimentos que se produce en la zona de rompientes.

Al comienzo de los años sesenta, el método basado en la teoría del rayo era el más extendido entre los ingenieros de costas y portuarios a la hora de determinar las características del oleaje necesarias en la zona de estudio. En España, se aplicó el método llamado de los Planos de Oleaje, desarrollado por Iribarren en los años treinta. Hoy en día los métodos computacionales y las características de los ordenadores disponibles dan al ingeniero la oportunidad de utilizar modelos numéricos sumamente sofisticados para establecer el clima marítimo de diseño. Estos modelos numéricos se basan en diferentes ecuaciones, condiciones de contorno y esquemas numéricos, que llevan inherentes varias limitaciones a la hora de establecer su aplicabilidad en casos reales. Más aún, el esfuerzo computacional necesario para resolver la transformación del oleaje en grandes zonas de estudio, incluyendo todos los procesos implicados, con diferentes escalas temporales y espaciales, es todavía demasiado grande.

En la actualidad los modelos numéricos para el estudio de la transformación del oleaje pueden clasificarse esencialmente en : a) modelos que resuelven la fase, basados en las ecuaciones no estacionarias de conservación de la masa y cantidad de movimiento integradas en vertical, y b) modelos promediados en la fase que se basan en la conservación de la energía espectral. La aplicación de los modelos que resuelven la fase se limita a áreas relativamente pequeñas (órdenes del kilómetro) mientras que los modelos promediados en la fase, no precisan una resolución tan pequeña pudiendo ser aplicados a áreas mucho mayores. Además, los diferentes procesos involucrados en la propagación del oleaje no son tratados de igual forma en cada uno de los tipos de modelos por lo que será necesario aplicar uno u otro en función de aquellos procesos que preponderen en cada caso de interés.

Las líneas más recientes de investigación se han centrado en el desarrollo de modelos unificados capaces de describir la propagación transitoria de ondas

completamente no lineales desde profundidades indefinidas hasta reducidas abarcando grandes áreas de trabajo. Además, se ha alcanzado un progreso considerable en el modelado de la rotura del oleaje y en la simulación de la interacción onda-estructura.

El objeto de este artículo es presentar un pequeño resumen de la evolución del modelado de la propagación del oleaje durante las dos últimas décadas y especialmente de los últimos avances relativos al desarrollo de modelos unificados y de la simulación de la rotura del oleaje.

Teorías de ondas

En principio, el movimiento oscilatorio asociado a las ondas en un fluido Newtoniano e incompresible, puede ser modelado mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, que representan los principios de conservación de la masa y del momento lineal. Las condiciones de contorno en la superficie libre que garantizan la existencia de una interfase y la continuidad del tensor de tensiones a través de la superficie libre son necesarios para determinar la posición de la superficie libre. Tanto las ecuaciones de Navier-Stokes como las condiciones de contorno en la superficie libre son no lineales. Por tanto, y aunque se considere que la turbulencia puede despreciarse, el esfuerzo computacional necesario para resolver el problema tridimensional de la propagación de la onda, con una escala horizontal de cientos de longitudes de onda, es demasiado grande para poder ser asumido dentro del mundo profesional de la ingeniería.

La teoría del rayo

Con el fin de reducir la demanda de esfuerzo computacional se ha tendido a reducir el dominio computacional. Más aún, el trabajo de los investigadores ha ido encaminado hacia el desarrollo de un modelo unificado capaz de propagar las ondas desde profundidades indefinidas hasta reducidas, incluso dentro de la zona de rompientes. El predecesor de estos modelos es la aproximación de la teoría del rayo para ondas infinitesimales propagándose por una batimetría suavemente variable en distancias mucho mayores que la longitud de onda local. En esta aproximación, se comienza obteniendo los rayos con base en la teoría óptico-geométrica, en la que se definen los rayos como la línea tangente al vector número de onda. A continuación se calcula la variación espacial de la envolvente de la onda a lo largo de los rayos con base en el principio de conservación de la energía.

La discretización numérica puede realizarse paso a paso a lo largo del rayo, con pasos no necesariamente muy pequeños en comparación con la longitud de onda característica. Dado que la teoría del rayo no permite el flujo de energía a través del rayo, pierde su validez cerca de los caústicos, donde se produce la intersección entre los rayos, y por tanto, los efectos de la difracción o no lineales son importantes. A pesar de que existen varias metodologías para resolver este problema localmente, no es siempre conveniente implementar este tipo de correcciones en casos prácticos.

Ecuación de la mild-slope (pendiente suave)

En el marco de la teoría lineal de ondas, Eckart (1952) y Berkhoff (1972, 1976) posteriormente, propusieron una mejora a la aproximación del rayo introduciendo una teoría para dos dimensiones que es adecuada para estudiar procesos de refracción y difracción en grandes extensiones. Esta teoría se basa fundamentalmente en asumir que los modos evanescentes no son importantes cuando las ondas se propagan sobre batimetría suavemente variable, excepto en las cercanías de obstáculos tridimensionales. Para una onda monocromática de frecuencia ω y superficie libre η , se puede expresar el potencial de velocidades correspondiente al modo propagante como

$$\phi = \frac{-ig\eta \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh} e^{-i\omega t} \quad (1)$$

donde $k(x,y)$ y $h(x,y)$ varían suavemente en las direcciones horizontales, x e y , y de acuerdo a la relación de dispersión lineal

$$\omega^2 = gk \tanh kh \quad (2)$$

siendo g la aceleración de la gravedad. Basándose en una técnica de perturbaciones Smith y Sprinks (1975) mostraron que la superficie libre debe satisfacer la siguiente ecuación

$$\nabla \cdot (CC_g \nabla \eta) + \frac{\omega^2}{g} \eta = 0 \quad (3)$$

donde

$$C = \frac{\omega}{k} \quad C_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{C}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh}\right) \quad (4)$$

representan la celeridad de la onda y de grupo para una onda plana progresiva. La ecuación diferencial de tipo elíptico, (3), es válida asintóticamente cuando $\delta = |\nabla h|/kh$ es suficientemente pequeño, y se conoce como ecuación de la pendiente suave (*mild-slope equation*). Una prueba de su versatilidad puede observarse en sus dos límites asintóticos. Para ondas largas en profundidades reducidas el límite de la ecuación (3) para $kh < 1$ se reduce a la conocida ecuación lineal para ondas largas y es válida incluso si $\delta = O(1)$. Por otro lado, para ondas cortas en profundidades indefinidas ($kh > 1$), (3) se reduce a la ecuación de Helmholtz donde k satisface la ecuación de la dispersión (2). Ambos límites son adecuados para calcular la difracción correctamente. Por tanto, la ecuación de la *mild-slope* puede utilizarse como una buena interpolación para cualquier kh y es adecuada para propagar ondas desde profundidades indefinidas hasta reducidas siempre y cuando la hipótesis de linealidad sea aceptable. La ecuación (3) puede ser, asimismo, derivada para tener en cuenta la presencia de corrientes (Liu, 1990).

Aproximación parabólica

Una de las dificultades a la hora de aplicar la ecuación de la *mild-slope* en grandes extensiones surge a la hora de especificar las condiciones de contorno en la línea de la costa, condición necesaria para poder resolver la versión elíptica de la ecuación de la *mild-slope*. El problema radica en que la localización de la línea de rotura no es conocida a priori, desconociendo, por tanto, la cantidad de energía disipada, reflejada o transmitida en el contorno. Una solución a este problema consiste en aplicar la aproximación parabólica de la ecuación de la *mild-slope*. Para casos en los que la onda se propaga esencialmente hacia adelante, la aproximación parabólica extiende la validez de la teoría del rayo permitiendo la “difusión” de energía a través del rayo. Por tanto, los efectos de la difracción se incluyen de forma aproximada en la aproximación parabólica. A pesar de que la aproximación parabólica se ha utilizado primordialmente para casos en los que la onda se propaga hacia adelante, la introducción de un método iterativo posibilita incluir propagaciones débiles hacia atrás, por ejemplo, cuando se produce reflexión en un contorno (Liu and Tsay 1983; Chen and Liu 1994).

Ondas de Stokes

Para ondas de amplitud finita, la hipótesis de no linealidad que requiere que

$kA \ll 1$ en cualquier punto del dominio y $A/h \ll 1$ en reducidas ($kh \ll 1$) (5)

puede dejar de ser válida. En profundidades indefinidas e intermedias es posiblemente más adecuado utilizar teorías de Stokes de órdenes superiores que tienen en cuenta los efectos de la amplitud finita basándose en la teoría de las perturbaciones. El hecho de que la amplitud sea finita tiene un efecto directo en la dispersión por frecuencias y, por tanto, en la celeridad de la onda. Por ejemplo, para ondas de Stokes de segundo orden la ecuación de la dispersión no lineal tiene la siguiente estructura

$$\omega^2 = gk \tanh kh + \kappa A^2 + \dots \quad (6)$$

donde

$$\kappa = \frac{k^4 C^2}{8 \sinh^4 kh} (8 + \cosh 4kh - 2 \tanh^2 kh) \quad (7)$$

y A representa la amplitud de la onda. La ecuación (6) puede entenderse como una serie de potencias de un parámetro pequeño, $kA \ll 1$. La correspondiente versión no lineal de la ecuación de la *mild-slope* y su aproximación parabólica fueron presentadas en Kirby and Dalrymple (1983) y Liu and Tsay (1984). Sin embargo, es necesario proceder con cautela a la hora de extender la teoría no lineal de Stokes a profundidades reducidas, dado que deben cumplirse una serie de condiciones adicionales. En el límite $kh \ll 1$ la ecuación de la dispersión no lineal puede aproximarse como

$$\omega^2 = gkh^2 \left(1 + \frac{9}{8} \frac{A}{h} \frac{A}{k^2 h^2} + \dots \right) \quad (8)$$

Para garantizar que la serie es convergente para $A/h \ll 1$, es necesario asegurarse de que el coeficiente que afecta al segundo término de la serie es de orden uno o más pequeño, es decir

$$U_r = O\left(\frac{A/h}{(kh)^2}\right) \leq O(1) \quad (9)$$

que se conoce como parámetro de Ursell. La condición (9) que impone que el parámetro de Ursell sea de orden uno o menor en profundidades reducidas es muy difícil de satisfacer. De acuerdo con la teoría lineal, en profundidades reducidas, la amplitud, A , aumenta proporcionalmente a $h^{-1/4}$ y kh decrece

con $\sqrt{h}$. Por tanto, el número de Ursell aumentará proporcionalmente a $h^{-3/4}$ a medida que la profundidad decrece y superará, por tanto, el orden uno para una profundidad dada. Con ello, se puede llegar a la conclusión de que la teoría no lineal de Stokes no es aplicable en profundidades reducidas y que es necesario encontrar ecuaciones alternativas para modelar la transformación de las ondas.

Aproximación de Boussinesq

Asumiendo que tanto la no linealidad como la dispersión frecuencial son débiles y del mismo orden de magnitud, Peregrine (1967) derivó las ecuaciones estándar de Boussinesq, para fondo variable.

$$\eta_t + \nabla \cdot [(\eta + h)\bar{u}] = 0 \quad (10)$$

$$\bar{u}_t + \frac{1}{2} \nabla |\bar{u}|^2 + g \nabla \eta + \left\{ \frac{h^2}{6} \nabla (\nabla \cdot \bar{u}) - \frac{h}{2} \nabla (\nabla \cdot (h \bar{u}_t)) \right\} = 0 \quad (11)$$

donde $\bar{u}$ es la velocidad promediada en vertical, η , el desplazamiento de la superficie libre, h , la profundidad referida al nivel en reposo, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ un operador diferencial, g la aceleración de la gravedad y t , un subíndice que indica derivación respecto al tiempo.

A pesar de que Peregrine expresó sus ecuaciones utilizando la velocidad integrada en vertical como variable dependiente, dichas ecuaciones pueden obtenerse con una estructura similar utilizando como variable la velocidad en el fondo o en la superficie libre. La ecuación de la dispersión y la celeridad de la onda derivadas, son algo diferentes para esta segunda versión de las ecuaciones, aunque el orden de magnitud de la exactitud de dichas ecuaciones es la misma. Los resultados numéricos basados en las ecuaciones estándar de Boussinesq o en formulaciones equivalentes han dado una buena comparación con datos de campo (Elgar and Guza, 1985) y de laboratorio (Goring, 1978, Liu *et al.*, 1985).

Dado que esta aproximación exige asumir que los efectos de la dispersión frecuencial y no lineales sean débiles, las ecuaciones estándar de Boussinesq no son aplicables en profundidades muy reducidas donde los efectos no lineales empiezan a ser más importantes que los efectos de la dispersión frecuencial, ni en profundidades indefinidas donde la dispersión frecuencial es del orden de la unidad. Las ecuaciones

estándar de Boussinesq formuladas en función de la velocidad promediada en vertical, dejan de ser válidas cuando la profundidad es mayor que un quinto de la longitud de onda equivalente en profundidades indefinidas. En la mayor parte de las aplicaciones ingenieriles, donde el espectro incidente está formado por múltiples componentes frecuenciales, sería deseable que la condición de profundidad no fuera tan restrictiva. Más aún, la resolución numérica de las ecuaciones de Boussinesq, las altas frecuencias, con longitudes de onda semejantes al tamaño de la malla pueden dar lugar a inestabilidades.

Para poder extender la aplicación a ondas más cortas (o profundidades mayores), se han introducido varias formulaciones modificadas de las ecuaciones de Boussinesq (e.g. Madsen *et al.* 1991, Nwogu 1993, Chen and Liu, 1995). A pesar de que los métodos de derivación son diferentes, las relaciones de dispersión de las componentes lineales de estas ecuaciones de Boussinesq modificadas, son similares, y pueden considerarse como ligeras modificaciones de la aproximación (2,2) de Padé, de la ecuación de la dispersión completa para ondas lineales (Witting, 1984). Las ecuaciones de continuidad y de conservación del momento integradas en vertical pueden expresarse en función del desplazamiento de la superficie libre, η , y de $\mathbf{u}_\alpha$, vector horizontal de velocidades a una profundidad z_α , tal que

$$\eta_t + \nabla \cdot [(\eta + h)\mathbf{u}_\alpha] + \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{z_\alpha^2}{2} - \frac{h^2}{6} \right) h \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \left(z_\alpha + \frac{h}{2} \right) h \nabla (\nabla \cdot h \mathbf{u}_\alpha) \right\} = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_{\alpha t} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}_\alpha|^2 + g \nabla \eta + z_\alpha \left\{ \frac{1}{2} z_\alpha \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)) \right\} + \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)) = 0 \quad (13)$$

Se ha demostrado que, con una selección óptima de $z_\alpha = -0.531h$ las ecuaciones modificadas de

Boussinesq son válidas para modelar la propagación de ondas desde profundidades indefinidas hasta reducidas incluyendo la interacción ola-corriente (Chen *et al.*, 1998). Es necesario hacer énfasis en que el término de aceleración convectiva en la ecuación del momento (11) y (13), se ha escrito de forma conservativa. Este término podría ser sustituido por su expresión correspondiente no conservativa, es decir, $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ y $\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}_\alpha$, respectivamente, sin que ello conduzca a variaciones en el orden de magnitud de la exactitud de las ecuaciones del modelo.

Modelo unificado

A pesar de que estas ecuaciones modificadas de Boussinesq funcionan con éxito en profundidades indefinidas e intermedias, su aplicación sigue viéndose limitada por la hipótesis de débil no linealidad. A medida que las ondas se aproximan a la costa, la altura de ola aumenta por efecto del asomeramiento y la ola rompe incluso en las playas naturales más tendidas. La relación entre la altura de ola y la profundidad asociada a este proceso físico, toma valores demasiado grandes para la aproximación de Boussinesq. Las ecuaciones más apropiadas para el primer orden de la solución debieran ser las ecuaciones no lineales en profundidades reducidas (NSWE). Por supuesto esta restricción en la aplicabilidad de las ecuaciones tipo Boussinesq puede soslayarse, eliminado la hipótesis de débil no linealidad (p.e. Liu 1994, Wei *et al.*, 1995). En sentido estricto estas ecuaciones, completamente no lineales, no pueden seguir siendo consideradas del tipo Boussinesq, dado que la no linealidad ya no está en equilibrio con la dispersión frecuencial, habiendo sido esta hipótesis la esencia de la aproximación de Boussinesq.

Las ecuaciones completamente no lineales y débilmente dispersivas son, (Liu, 1994):

$$\eta_t + \nabla \cdot \left\{ (h + \eta) \left[\mathbf{u}_\alpha + \left(z_\alpha + \frac{1}{2}(h - \eta) \right) \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)) + \left(\frac{1}{2} z_\alpha^2 - \frac{1}{6} (h^2 - h \eta + \eta^2) \right) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) \right] \right\} = 0 \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_{\alpha t} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}_\alpha|^2 + g \nabla \eta + z_\alpha \left\{ \frac{1}{2} z_\alpha \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \nabla (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)) \right\} + \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{2} (z_\alpha^2 - \eta^2) (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) (\nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha) + \frac{1}{2} [\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha) + \eta \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha]^2 \right\} + \nabla \cdot \left\{ (z_\alpha - \eta) (\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla) (\nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha)) - \eta \left[\frac{1}{2} \eta \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot (h \mathbf{u}_\alpha t) \right] \right\} = 0 \quad (15)$$

Estas ecuaciones no son más que la formulación de la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento respectivamente, y han sido derivadas sin realizar ninguna aproximación relativa a la no linealidad de las mismas. Por tanto, si en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento (15) se reemplaza la expresión del término inercial $\frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}_\alpha|^2$ por $\mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \mathbf{u}_\alpha$, será necesario añadir

términos de orden superior con el fin de mantener el orden de magnitud de la exactitud de las ecuaciones. Es relativamente sencillo demostrar que las ecuaciones de Boussinesq convencionales, (10) y (11), y las ecuaciones de Boussinesq modificadas, (12) y (13), son casos particulares de las ecuaciones unificadas (14) y (15).

Disipación de energía

En las secciones anteriores todas las teorías de ondas presentadas se han basado en la hipótesis de que durante el proceso de transformación de las ondas no se produce disipación de energía. Sin embargo, en la mayor parte de los fenómenos que se producen en la costa, la disipación de energía producida, por ejemplo, por fricción en el fondo o por procesos de rotura, puede ser muy importante. La ecuación de la *mild-slope* puede ser modificada de manera muy simple para tener en cuenta estos fenómenos incluyendo una función de disipación de energía que describa la tasa de variación de la energía asociada a la onda. Las funciones de disipación de energía suelen ser definidas, usualmente, de forma empírica de acuerdo a los diferentes procesos de disipación que pretenden ser modelados (p.e. Dalrymple *et al.*, 1994). Análogamente, en los modelos numéricos basados en las ecuaciones del tipo Boussinesq, la rotura puede ser parametrizada introduciendo un nuevo término en la ecuación del momento integrada en vertical. Mientras que Zelt (1991), Karambas y Koutitas (1992) y Kennedy *et al.* (2000) utilizan un modelo basado en la viscosidad de remolino, Brocchini *et al.* (1992) y Schäffer *et al.* (1993) optan por la implementación de un modelo del “roller”, más complicado, y basado en el concepto del “roller” superficial que se produce en la rotura en decrestamiento (spilling). En el modelo del “roller” el espesor del “roller” en cada punto y la orientación del “roller” deben ser datos conocidos a priori. Además, en cualquiera de las dos aproximaciones al problema, es necesario imponer el inicio del proceso de rotura con base en ciertas hipótesis. El ajuste entre los resultados numéricos y los datos de evolución de la superficie libre en el laboratorio y en el campo es bueno siempre que se realice un calibrado adecuado de los parámetros incluidos en los modelos de rotura. Sin embargo, ninguno de estos modelos es capaz de reproducir convenientemente el campo de velocidades o de determinar la distribución espacial de la energía cinética turbulenta. Estas limitaciones hacen necesaria la utilización de modelos más específicos para analizar el proceso de rotura.

Modelado de la rotura de las ondas mediante las ecuaciones promediadas de Reynolds (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations (RANS))

El modelado numérico tridimensional del proceso de rotura entraña una dificultad extrema, ha-

ciendo precisa la superación de varios retos importantes. En primer lugar, se hace necesaria la descripción de la evolución de la posición de la superficie libre durante el proceso de rotura con el fin de modelar adecuadamente la dinámica asociada a dicha superficie. En segundo lugar, es necesario modelar los mecanismos físicos asociados a la generación, transporte y disipación de turbulencia durante todo el proceso de la rotura. Y finalmente, es necesario superar la enorme demanda de recursos computacionales requerida para la resolución de este problema.

Hasta el momento, se han obtenidos varios resultados bidimensionales con éxito. Por ejemplo, la rotura bidimensional de ondas ha sido estudiada mediante el método MAC (Marker And Cell), (p.e. Johson *et al.*, 1994) y el VOF (Volume Of Fluid) (p.e. Ng and Kot, 1992, Lin and Liu, 1998a, b).

(Lin y Liu, 1998a) muestran que la rotura en decrestamiento y voluta del oleaje en la zona de rompientes puede modelarse en dos dimensiones mediante las ecuaciones promediadas de Reynolds (RANS), acopladas con un modelo de cierre de la turbulencia del tipo $k-\varepsilon$, de segundo orden. Por otro lado, el modelado basado en la aproximación LES (Large Eddy Simulation, o de simulación de vórtices de gran escala, ha sido aplicado con éxito para el estudio de flujos en canales abiertos en los que no se produce la rotura de la superficie libre (p.e. Hodges, 1997). Sin embargo, hasta el momento, se ha hecho muy poco trabajo en el modelado tridimensional del proceso de rotura. Miyata *et al.* (1996) y Kawamura (1998) presentan modelos numéricos para el estudio tridimensional de ondas generadas por barcos mediante la simulación de una superficie libre uniforme pasando a lo largo un cilindro vertical. Sin embargo, el proceso dinámico cuasi-estacionario de las ondas generadas por barcos es muy diferente al proceso de la rotura del oleaje en la zona de rompientes.

En esta sección se presenta someramente la formulación matemática y el algoritmo numérico correspondientes al modelado de la rotura de una onda. Una descripción más detallada puede encontrarse en Liu y Lin (1997) y Lin y Liu (1998a, b). El modelo de rotura se basa en las ecuaciones promediadas de Reynolds (RANS). A pesar de que el modelo ha sido inicialmente aplicado al estudio de problemas bidimensionales, se presentan las ecuaciones completas tridimensionales con el fin de favorecer su uso en investigaciones posteriores. En un flujo turbulento el campo de velocidades y de presiones puede descomponerse en dos

partes: la velocidad $\langle u_i \rangle$ y presión $\langle p \rangle$ medias (media de conjunto) y la velocidad y presión turbulentas, u'_i y p' . Por tanto,

$$u_i = \langle u_i \rangle + u'_i, \quad p = \langle p \rangle + p' \quad (16)$$

en donde $i = 1, 2, 3$ para un flujo tridimensional. Asumiendo que el fluido es incompresible, el flujo medio puede describirse mediante las ecuaciones de Navier-Stokes promediadas según Reynolds (RANS)

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x_i} + g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle}{\partial x_j} - \frac{\partial \langle u'_i u'_j \rangle}{\partial x_j}, \quad (18)$$

donde ρ es la densidad del fluido, g_i la componente i -ésima de la aceleración de la gravedad, el tensor de tensiones medio es $\langle \tau_{ij} \rangle = 2\mu \langle \sigma_{ij} \rangle$, μ es la viscosidad

molecular del fluido y $\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right]$, es el

tensor de deformación del flujo medio. En la ecuación de conservación del momento (18), la influencia de las fluctuaciones turbulentas en el flujo medio se representa mediante el tensor de tensiones de Reynolds $\rho \langle u'_i u'_j \rangle$. Se han desarrollado varios modelos de cierre de segundo orden para el problema turbulento y con diferentes aplicaciones, que han sido revisados recientemente en un artículo (Jaw and Chen, 1998a y b). En el modelo considerado, las tensiones de Reynolds $\rho \langle u'_i u'_j \rangle$ se formulan mediante un modelo algebraico no lineal de tensiones (Shih et al., 1996; Lin y Liu, 1998a, b):

$$\begin{aligned} \rho \langle u'_i u'_j \rangle = & \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - C_d \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \\ & - \rho \frac{k^3}{\varepsilon^2} \left[C_1 \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_i} \delta_{ij} \right) \right. \\ & + C_2 \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} - \frac{1}{3} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \\ & \left. + C_3 \left(\frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_i} \frac{\partial \langle u_k \rangle}{\partial x_j} - \frac{1}{3} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

en donde C_d , C_1 , C_2 y C_3 son unos coeficientes empíricos, δ_{ij} la delta de Kronecker, $k = \frac{1}{2} \langle u'_i u'_i \rangle$ la

energía cinética turbulenta y $\varepsilon = \nu \left\langle \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle$ es la tasa

de disipación de la energía turbulenta, donde $\nu = \mu / \rho$ es la viscosidad cinemática molecular. Obsérvese que para un modelo convencional de viscosidad de remolino $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ en (19) y que, por tanto, la viscosidad de remolino se expresa como $\nu_t = C_d \frac{k^2}{\varepsilon}$. La ventaja del modelo no

lineal de las tensiones de Reynolds (19) frente al modelo convencional de viscosidad de remolino, es que el primero puede aplicarse, en general, a flujos turbulentos anisótropos.

Las ecuaciones de gobierno para k y ε son (Rodi, 1980; Lin y Liu, 1998a, b)

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \langle u'_i u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - \varepsilon, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \langle u_j \rangle \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \\ & + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_j} - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}, \end{aligned} \quad (21)$$

donde σ_k , σ_ε , $C_{1\varepsilon}$ y $C_{2\varepsilon}$ son coeficientes empíricos. En la ecuación de transporte de la energía cinética turbulenta (20), el término a la izquierda representa la convección, mientras que el primer término a la derecha representa la difusión. El segundo y tercer término a la derecha de (20) representan la producción y disipación de energía cinética turbulenta, respectivamente.

Los coeficientes en las ecuaciones (19) y (21) se pueden determinar mediante la realización de múltiples experimentos sencillos e intentando imponer el sentido físico. Los valores recomendados de estos coeficientes son (Rodi, 1980; Lin y Liu, 1998a, b):

$$\begin{aligned} C_d = & \frac{2}{3} \left(\frac{1}{7.4 + S_{\max}} \right), \quad C_1 = \frac{1}{1852 + D_{\max}^2} \\ C_2 = & -\frac{1}{585 + D_{\max}^2}, \quad C_3 = \frac{1}{3704 + D_{\max}^2} \\ C_{1\varepsilon} = & 1.44, \quad C_{2\varepsilon} = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \end{aligned} \quad (22)$$

donde $S_{max} = \frac{k}{\varepsilon} \max \left[\left| \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} \right| \right]$ (índices repetidos

no se suman) y $D_{max} = \frac{k}{\varepsilon} \max \left[\left| \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_i} \right| \right]$.

Para resolver el problema, es necesario, además, imponer unas condiciones de contorno apropiadas. Para el flujo medio, se impone una condición de adherencia en la superficie sólida, y una condición de suma de tensiones igual a cero en la superficie libre media, despreciando por tanto cualquier efecto aerodinámico. Para el flujo turbulento, en el contorno sólido, se impone una distribución logarítmica de la velocidad tangencial media en la capa límite turbulenta, de modo que los valores de k y ε puedan ser expresados como una función de la distancia al contorno y de la velocidad tangencial media fuera de la subcapa viscosa. En la superficie libre, se impone las condiciones de gradiente nulo tanto para k como para ε , es decir $\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = 0$. Para las condiciones iniciales

se asume un bajo nivel de k . La justificación para esta aproximación puede encontrarse en Lin y Liu (1998a,b).

Las ecuaciones RANS se resuelven mediante un método de proyección en dos pasos en diferencias finitas (Chorin, 1968) en una malla rectangular que se divide en $m \times n$ celdas. Para discretizar las derivadas temporales, se utiliza un esquema de avance en el tiempo. Los términos convectivos se resuelven combinando un esquema de derivación centrada y un esquema "upwind". Para discretizar las otras derivadas espaciales, gradientes de presiones y de tensiones tangenciales, se utiliza el esquema de derivación centrada. Las ecuaciones de transporte para k y ε se discretizan de forma similar. El movimiento de la superficie libre se resuelve utilizando una técnica VOF (Volume Of Fluid). En este modelo se obtiene el cambio de la función VOF que depende de la densidad media en cada celda para luego reconstruir la superficie libre. La información detallada puede encontrarse en Kothe *et al.* (1991), Lin y Liu (1997), y Lin y Liu (1998a, b).

El modelo matemático descrito ha sido verificado comparando los resultados numéricos con datos experimentales o con soluciones analíticas para casos simples. Si no hay rotura, los modelos numéricos pueden generar y propagar fielmente tanto ondas solitarias como periódicas (Liu y Lin, 1997). Asimismo, el modelo numérico es capaz de

simular el volteo del chorro superficial que se produce en la fase inicial de la rotura en voluta (Lin y Liu, 1998b). Tanto para rotura en decrestamiento como en voluta en una playa, el modelo ha sido verificado con datos de laboratorio obtenidos por Ting y Kirby (1994, 1995). La descripción detallada de los resultados numéricos, así como las comparaciones con datos experimentales pueden encontrarse en Lin y Liu (1997), y Lin y Liu (1998a, b). En general el acuerdo entre datos numéricos y experimentales obtenido ha sido muy bueno. Aunque no se muestren en este artículo, estos resultados han sido utilizados para dar una explicación a la generación y transporte de turbulencia y vorticidad durante el proceso de rotura en la zona de rompientes. Los perfiles verticales de la viscosidad de remolino se calcularon para toda la zona de rompientes. Más aun, el modelo es válido para demostrar los diferentes procesos de difusión que se producen cuando se produce el vertido de cualquier contaminante en el interior o el exterior de la zona de rompientes (Lin y Liu, 1998b).

Más recientemente, el modelo de rotura ha sido extendido para investigar la interacción del oleaje con estructuras de protección de costas incluyendo el proceso de rotura (Liu *et al.* 1999, 2000). Las estructuras consideradas pueden ser emergidas o sumergidas. Las fuerzas inducidas por el oleaje sobre la estructura pueden ser obtenidas a partir de la ley de presiones sobre la superficie de la estructura. Actualmente, el modelo se ha desarrollado en su versión bidimensional. Es sin embargo, muy deseable, su extensión a tres dimensiones.

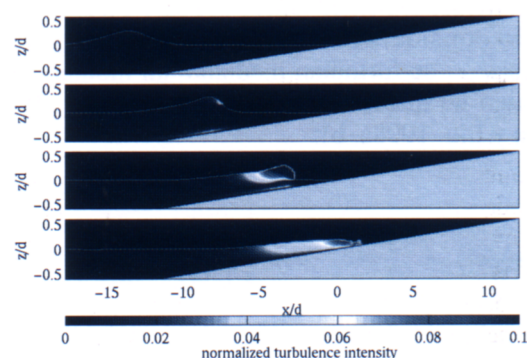


Fig. 1. Evolución de la rotura de una onda solitaria en diferentes instantes. Intensidad turbulenta normalizada. Resultados numéricos obtenidos mediante el modelo presentado en (Lin y Liu, 1998a).

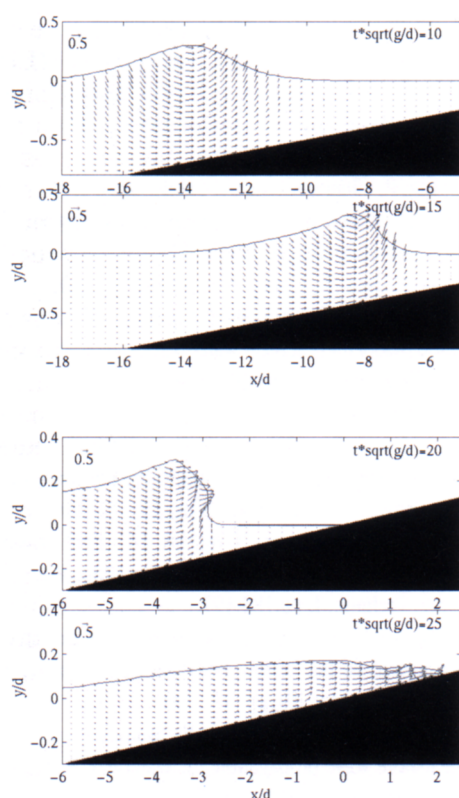


Fig 2. Campo de velocidades asociado al proceso de rotura de una onda solitaria en cuatro instantes diferentes obtenido mediante el modelo presentado en (Lin y Liu, 1998a).

Conclusiones

A pesar de que, gracias al rápido incremento del poder computacional de los ordenadores, cada día nos encontramos más cerca de poder resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes en grandes dominios directamente, todavía es necesario trabajar con teorías alternativas que, mediante algunas hipótesis simplificadoras, permitan modelar la propagación del oleaje de acuerdo a las necesidades de la ingeniería de costas. En los últimos años se ha realizado un enorme progreso encaminado a desarrollar modelos matemáticos unificados útiles para modelar los procesos de transformación del oleaje desde profundidades indefinidas hasta reducidas. Los resultados de la última generación de modelos numéricos basados en ecuaciones unificadas tipo Boussinesq han sido contrastados con datos experimentales especialmente para su aplicación para el estudio de la hidrodinámica en la zona de rompientes, dado que éste ha sido el motivo esencial para impulsar su desarrollo. Aunque ya existen diferentes versiones en diferencias finitas, su aplicación sistemática en el mundo de la ingeniería de costas no se producirá hasta dentro de algunos años, siendo necesario

mejorar el modelado de la rotura o de algunas condiciones de contorno con el fin de conferir al modelo numérico la robustez necesaria para una posible aplicación indiscriminada. Además, su aplicación a problemas de la ingeniería portuaria se encuentra en pleno desarrollo. Por todo ello, en la actualidad prevalece la aplicación de modelos de propagación basados en la ecuación de la *mild-slope*, o alguna de las versiones modificadas de las ecuaciones de Boussinesq.

Como se ha comentado en este artículo, el modelado de la rotura o de la interacción con estructuras ha mejorado considerablemente con el desarrollo de modelos basados en las ecuaciones de Navier-Stokes. Sin embargo, este tipo de modelos se encuentran en una situación pretecnológica siendo necesario mejorar considerablemente algunos aspectos como la extensión de los mismos a 3-D, mejora del modelado de la turbulencia, la optimización de los algoritmos con el fin de reducir el coste computacional o el modelado del flujo en medios porosos.

Agradecimientos

P.L.-F. Liu agradece la financiación recibida de la National Science Foundation, Office of Naval Research, Army Research Office y Sea Grant Program. Iñigo J. Losada desea expresar su gratitud a la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología por la financiación concedida a través del proyecto de investigación MAR99-0653.

Referencias

- Berkhoff, J. C. W. 1972 "Computation of combined refraction and diffraction", Proceedings of the 13th International Coastal Engineering Conference, ASCE, 471-490.
- Berkhoff, J. C. W. 1976 Mathematical models for simple harmonic linear water waves; wave refraction and diffraction. PhD thesis, Delft Technical University of Technology.
- Brocchini, M., Drago, M. and Ivoenitti, L. 1992. "The modeling of short waves in shallow water: Comparison of numerical model based on Boussinesq and Serre equations." Proc. 23rd Intl. Conf. Coastal Engng. ASCE. 76-88.
- Chen, Q., Madsen, P. A., Schaffer, H. A. and Basco, D. R., 1998 Wave-current interaction based on an enhanced Boussinesq approach", Coastal Engng., **33**, 11-39.
- Chen, Y. and Liu, P. L.-F. 1994 "A Pseudo-Spectral Approach for Scattering of Water Waves", Proc. Roy. Soc. London, A, 445, 619-636.
- Chen, Y. and Liu, P. L.-F. 1995b "Modified Boussinesq equations and associated parabolic models for water wave propagation," J. Fluid Mech., **288**, 351-381.

- Chorin, A.J. 1968 "Numerical solution of the Navier-Stokes equations." *Math. Comput.* **22**, 745-762.
- Dalrymple, R.A., Kirby, R.T. and Hwang, P.A. 1984. "Wave diffraction due to area of energy dissipation." *J. of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE., **110**, No. 1., 67-79.
- Eckart, C. 1952 "The propagation of gravity waves from deep to shallow water". Circular **20**, National Bureau of Standards, 165-173.
- Elgar, S. and Guza, R. T. 1985 "Shoaling gravity waves: comparisons between field observations, linear theory and a nonlinear model", *J. Fluid Mech.*, **158**, 47-70.
- Goring, D. G. 1978 "Tsunamis - the propagation of long waves on to a shelf", Ph.D. dissertation, California Institute of Technology, Pasadena, CA.
- Hodges, B.R. 1997, Numerical simulation of nonlinear free surface waves on a turbulent open-channel flow, PhD Dissertation, Department of Civil Engineering, Stanford University.
- Jaw, S.Y. & Chen, C.J. 1998 "Present status of second-order closure turbulence model. I: overview." *J. Engineering Mechanics*, **124**, pp. 485-501.
- Jaw, S.Y. & Chen, C.J. 1998 "Present status of second-order closure turbulence models. II: application." *J. Engineering Mechanics*, **124**, 502-512.
- Johnson, D.B., Raad, P.E. & Chen, S. 1994, "Simulation of impacts of fluid free surface with solid boundary," *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **19**, 153-174.
- Karambas, Th. V. and Koutitas, C. 1992. "A breaking wave propagation model based on the Boussinesq equations." *Coastal Engineering*, ELSEVIER, **18**, 1-19.
- Kawamura, T. 1998 "Numerical simulation of 3D turbulent free-surface flows", International Research Center for Computational Hydrodynamics (ICCH), Denmark.
- Kennedy, A.B., Chen, Q., Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. 2000. "Boussinesq modeling of wave transformation, breaking and runup, I: 1D." *J. of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, ASCE., **126**, No. 1., 39-48.
- Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. 1983. "A parabolic equation for combined refraction-diffraction of Stokes waves by a mildly varying topography." *J. Fluid Mech.*, **136**, 453-466.
- Kothe, D.B., Mjolsness, R.C. & Torrey, M.D. 1991 "RIPPLE: a computer program for incompressible flows with free surfaces." Los Alamos National Laboratory, LA-12007-MS.
- Lin, P. and Liu, P. L.-F. 1998a "A Numerical Study of Breaking Waves in the Surf Zone", *J. Fluid Mech.*, **359**, 239-264.
- Lin, P. and Liu, P. L.-F. 1998b "Turbulence Transport, Vorticity Dynamics, and Solute Mixing Under Plunging Breaking Waves in Surf Zone," *J. Geophys. Res.*, **103**, 15677-15694.
- Liu, P. L.-F. 1990 "Wave transformation", in *The Sea*, Wiley-Interscience Publication. v. **9**, 27-63.
- Liu, P. L.-F. 1994 "Model equations for wave propagation from deep to shallow water", in *Advances in Coastal and Ocean Engineering*, v.1, 125-158.
- Liu, P. L.-F. and Tsay, T.-K. 1983. "On weak reflection of water waves." *J. Fluid Mech.*, **131**, 59-71.
- Liu, P. L.-F. and Tsay, T.-K. 1984. "Refraction-diffraction model for weakly nonlinear water waves" *J. Fluid Mech.*, **141**, 265-274.
- Liu, P. L.-F., Yoon, S. B. and Kirby, J. T. 1985 "Nonlinear refraction-diffraction of waves in shallow water", *J. Fluid Mech.*, **153**, 185-201.
- Liu, P. L.-F., Lin, P., Chang, K.-A., and Sakakiyama, T. 1999 "Wave interaction with porous structures", *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engrg.*, ASCE, **125**, (6), 322-330.
- Liu P.L.-F, Lin, P., Hsu, T., Chang, K., Losada, I.J., Vidal, C. and Sakakiyama, T. 2000. A Reynolds averaged Navier-Stokes equation model for nonlinear water wave and structure interactions. *Proceedings Coastal Structures 99*. Ed. I.J. Losada, A.A. Balkema. Rotterdam.
- Madsen, P. A., Murray, R. and Sorensen, O. R. 1991 "A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics", *Coastal Engineering*, **15**, 371-388.
- Miyata, H., Kanai, A., Kawamura, T. & Park, J.-C. 1996 "Numerical simulation of three-dimensional breaking waves", *J. Mar. Sci. Technol.*, **1**, pp.183-197.
- Ng, C. O. & Kot, S.C. 1992 "Computations of water impact on a two-dimensional flat-bottom body with a volume of fluid method", *Ocean Eng.* **19**, pp. 377-393.
- Nwogu, O. 1993 "An alternative form of the Boussinesq equations for nearshore wave propagation", *J. Waterway. Port, Coast. Ocean Engrg.* ASCE, **119**, 618-638.
- Peregrine, D. H. 1967 "Long waves on a beach" *J. Fluid Mech.*, **27**, 815-882.
- Rodi, W. 1980. "Turbulence models and their application in hydraulics - a state-of-the-art review." IAHR Publication.
- Schäffer, H.A., Madsen, P.A. and Deigaard, R.A. (1993). "A Boussinesq model for waves breaking in shallow water." *Coastal Engineering*, **20**, 185-202.
- Shih, T.-H., Zhu, J. & Lumley, J.L. 1996. "Calculation of wall-bounded complex flows and free shear flows." *Intl J. Numer. Meth. Fluids*, **23**, 1133-1144.
- Smith, R. and Sprinks, T. 1995. "Scattering of surface waves by a conical island." *J. Fluid. Mech.*, **72**, 373-384.
- Ting, F.C.K. and Kirby, J.T. 1995, "Dynamics of surf-zone turbulence in a strong plunging breaker." *Coastal Engng*, **24**, 177-204.
- Ting, F.C.K. and Kirby, J.T. 1994, "Observation of undertow and turbulence in a laboratory surf zone." *Coastal Engng*, **24**, 51-80.
- Witting, J. M. 1984 "A unified model for the evolution of nonlinear water waves", *J. Comp. Phys.*, **56**, 203-236.
- Zelt, J. L. 1991 "The run-up of nonbreaking and breaking solitary waves", *Coastal Engng*, **15**, 205-246.