

# PREDICCIÓN DE AVENIDAS MEDIANTE LA TEORÍA DE LOS SUBCONJUNTOS BORROSOS

Gabriel Soto y Carlos A. Escalante<sup>1</sup>

**RESUMEN:** Se discuten las bases matemáticas fundamentales de la modelación borrosa en términos de la función de membresía. Se presenta un modelo para la predicción de avenidas a tiempo real a partir de inferencias borrosas y bajo la hipótesis de que la información disponible es escasa. Para construir el modelo, el problema es dividido en tres etapas. En la primera de ellas, se infiere el tiempo pico a partir del gasto base inicial. En una segunda etapa se determina el gasto pico. Finalmente, se infieren las restantes variables temporales que dan forma al hidrograma de la avenida a partir de una correlación lineal ordinaria. Se discute la mejora sustancial de la respuesta del modelo al agregar nueva información. La metodología propuesta se aplica exitosamente al registro de avenidas máximas en la estación Huites, México. Los resultados obtenidos son muy satisfactorios.

## INTRODUCCIÓN

Una vez que en cierta cuenca la lluvia inicia, desearíamos ser capaces de inferir con tiempo suficiente, de qué manera dicha precipitación se traducirá en escurrimiento, lo que permitiría tomar medidas preventivas suficientes para mitigar los efectos indeseables de las inundaciones. Desafortunadamente, transcurridas unas pocas horas de iniciada la lluvia, solamente conocemos descripciones verbales de su intensidad. En tales casos la modelación basada en las técnicas clásicas resulta imposible, debido principalmente a que éstas no permiten cuantificar a las variables verbales que describen el fenómeno. En este sentido, la teoría de los subconjuntos borrosos permite interpretar adecuadamente esta problemática.

A la fecha, no se han publicado trabajos en el área de la Hidráulica en la literatura relacionada a la matemática borrosa y sus aplicaciones. En el caso de la Hidrología, existen un par de ellos, Fujita *et al*(1992) y Fujita y Hayakawa (1989), relativos al pronóstico de avenidas a tiempo real usando información de la distribución temporal y espacial de lluvias y con auxilio de un Sistema de Información Geográfica, GIS (siglas en inglés).

Por lo anterior, el modelo descrito en este trabajo no ha podido ser comparado con algún otro semejante en la misma área de conocimiento, aunque un par de aplicaciones de las redes neuronales (Toledo 1996a y 1996b) con propósitos muy parecidos a los discutidos aquí, permiten establecer parámetros comparativos.

## PROPOSICIONES BORROSAS

De manera cotidiana nuestro lenguaje infiere o pronostica con base en estructuras gramaticales llamadas proposiciones borrosas:

*Proposición:* Si  $x$  es  $A$  entonces  $y$  es  $B$

*Premisa:*  $x$  es  $A$  (1)

*Inferencia:*  $y$  es  $B$

donde  $x$  es un evento conocido, mientras  $y$  es un evento asociado a  $x$  y de naturaleza desconocida.  $A$  y  $B$  son conceptos borrosos o ambiguos (generalmente adjetivos) los cuales pueden cuantificarse. Suponga que la expresión (1) relaciona al tiempo pico " $t_p$ " con el gasto pico " $Q_{dp}$ " así (Figura 1):

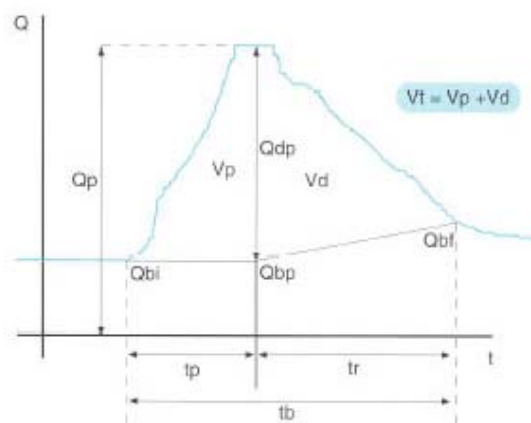


Figura 1. Componentes de un Hidrograma

<sup>1</sup>Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional Autónoma de México. Subdirección de Hidráulica. Ciudad Universitaria. Aptdo. postal 70472. Coyoacan 04510. México D.F.

Artículo publicado en *Ingeniería del Agua*. Vol.4 Num.4 (diciembre 1997), páginas 29-36, recibido el 12 de junio de 1997 y aceptado para su publicación el 20 de octubre de 1997. Pueden ser remitidas discusiones sobre el artículo hasta seis meses después de la publicación del mismo. En el caso de ser aceptadas, las discusiones serán publicadas conjuntamente con la respuesta de los autores en el primer número de la revista que aparezca una vez transcurrido el plazo indicado.

Proposición: Si el  $tp$  es grande ( $G$ ) entonces el  $Qdp$  es medio ( $M$ )

Premisa:  $tp$  es grande (2)

Inferencia:  $Qdp$  es medio

Los conceptos borrosos *grande* y *medio* podrían representarse a través de las funciones  $\mu_G(tp)$  y  $\mu_M(tp)$  respectivamente, las cuales son llamadas funciones de membresía y determinan el grado con el cual un valor  $tp$  o  $Qdp$  es considerado elemento de los subconjuntos borrosos  $G$  (grande) y  $M$  (medio). Las funciones de membresía son funciones reales que toman sus valores en el intervalo  $[0, 1]$ . Un valor  $tp$  podría pertenecer totalmente al conjunto  $G$  ( $\mu_G(tp)=1$ ), no pertenecer ( $\mu_G(tp)=0$ ) o bien pertenecer parcialmente ( $\mu_G(tp) \in (0, 1)$ ). Se observa que el concepto de la función de membresía se transforma en la bien conocida "función característica" asociada a la operación entre conjuntos ordinarios, siempre que  $\mu_G(tp)$  tome solamente los valores uno o cero.

Kaufmman (1982) sugiere que en aplicaciones ingenieriles las funciones de membresía sean del tipo triangular. Así, por ejemplo, la función de membresía asociada a  $\mu_G(tp)$  podría interpretarse gráficamente como se muestra en la *Figura 2*:

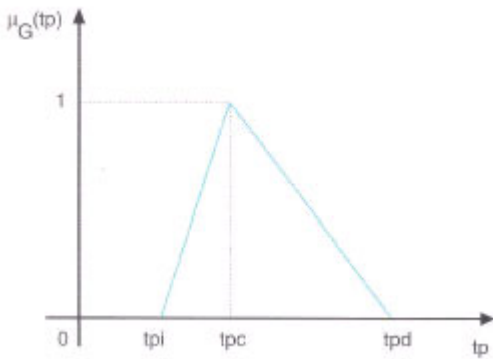


Figura 2. Función triangular de membresía

donde  $tpi$ ,  $tpc$  y  $tpd$  representan las cotas izquierda, centro y derecha de la función de membresía asociada al conjunto grande. Analíticamente:

$$\mu_G(tp) = \begin{cases} \frac{tp - tpi}{tpc - tpi} & tpi \leq tp \leq tpc \\ \frac{tpd - tp}{tpd - tpc} & tpc < tp \leq tpd \end{cases} \quad (3)$$

En la *Figura 2*, el eje de las abscisas se llama "universo de discusión de  $tp$ " y representa el rango de valores que puede tomar la variable tiempo pico. Retomando la proposición borrosa dada en la expresión (1), Zadeh (1975) propone interpretarla haciendo uso de una regla de inferencia titulada "regla compuesta de inferencia", la cual infiere  $B$  al tomar la composición lógica de  $A$  junto con

la relación borrosa traducida a partir de la proposición condicional. En este trabajo se hace uso de proposiciones de estructura más compleja que las representadas por la expresión (1) y son de la forma:

Proposición: Si  $x$  es  $A$  e  $y$  es  $B$  entonces  $z$  es  $C$

Premisas:  $x$  es  $A$  ;  $y$  es  $B$  (4)

Inferencia:  $z$  es  $C$

En forma abreviada, la expresión (4) se escribe como:

$$P(AB \rightarrow C) \quad (5)$$

Según lo descrito arriba, Zadeh (1975) propone cuantificar la expresión (4) a partir de las funciones de membresía y la proposición condicional:

$$C' = \mu_A(x) \wedge \mu_B(y) = \text{Min} \{ \mu_A(x), \mu_B(y) \} \quad (6)$$

donde  $C'$  determina el grado con el cual el pronóstico  $C$  se encuentra asociado a las premisas dadas en la expresión (4). Existen diversos métodos para interpretar el valor de membresía  $C'$  en términos de números ordinarios. En este trabajo se usa el criterio del centroide, el cual consiste en encontrar esta característica en la función de membresía  $\mu_C(z)$  ajustada a un valor  $\alpha$  (llamada alfa de corte) y que corresponde al valor  $C'$  ( $\alpha = C'$ ), de tal forma que la función triangular se transforma en una función trapezoidal tal como lo ilustra la *Figura 3*.

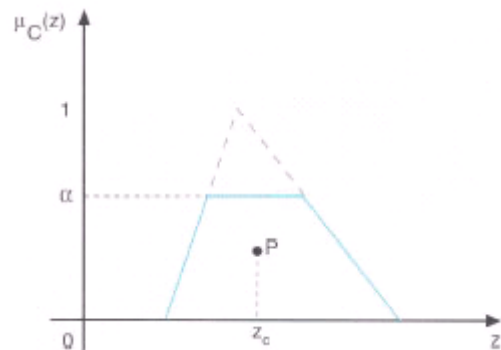


Figura 3. Interpretación de  $C'$  usando el criterio del centroide

**MODELOS BORROSOS**

En general, un modelo matemático borroso involucra una serie de tareas, entre ellas:

- Identificar, nombrar y determinar los universos de discusión de las variables involucradas en el modo lo.
- Determinar las funciones de membresía necesarias para describir el universo de discusión de cada variable involucrada en el modelo.
- Establecer las reglas lógicas que asocian el comportamiento de las variables del modelo.

El conjunto de reglas lógicas descritas en el último punto, recibe el nombre de "base de conocimiento experto" y representa el alma del modelo matemático. Como veremos, la base de conocimientos tiene la cualidad de que se encuentra expresada en términos de proposiciones verbales del tipo dado en las expresiones (1) y (4).

En lo que resta de este trabajo se desarrollará un modelo borroso para el pronóstico de avenidas. La intención es mostrar de manera concreta la metodología de la modelación y su alcance.

**PRONÓSTICO DE AVENIDAS**

Se considera la siguiente hipótesis:

- **Hipótesis uno.** Una vez iniciada la precipitación, la única información disponible corresponde al gasto base al inicio de la avenida "Q<sub>bi</sub>". El tiempo pico correspondiente se encuentra asociado a la "memoria histórica del cauce". El modelo borroso que se pretende deberá ser capaz de extraer de dicha memoria la regla natural bajo la cual se rige el comportamiento del escurrimiento.

**Información disponible para la modelación**

Para desarrollar la metodología que permita establecer un modelo matemático borroso para la predicción de avenidas a tiempo real, se cuenta con el registro histórico de gastos medios diarios de la estación Huites durante el período de 1942 a 1985. La estación Huites se ubica en el estado de Sinaloa, México, en la región hidrológica número 10 (Figura 4). El área correspondiente a su cuenca es de 26.020 km<sup>2</sup> y la longitud del cauce principal es 267 km.



Figura 4. Región hidrológica número 10

**Bases de la primera hipótesis**

- Debido a que la superficie de la cuenca en estudio es de una magnitud considerable, el tiempo de respuesta de la misma permitirá aplicar políticas de prevención contra los efectos nocivos de las inundaciones.
- La información histórica que alimenta al modelo corresponde a los eventos extremos anuales de tal forma que el *tp* inferido corresponde al comportamiento histórico más extremo.
- Aún cuando el modelo no considera como una de sus variables la información relativa a la lluvia, para establecer con cierta claridad el comportamiento histórico de la misma, fue preciso estudiarla en términos estadísticos. La precipitación anual promedio en la región es de 576 mm. En el período de junio a octubre (lluvias de verano) se presenta el 80% de la precipitación total, aunque durante noviembre a marzo (lluvias de invierno) se presentan los eventos más extremos que equivalen al 15% de la precipitación anual.

**Modelo borroso para la determinación de tiempos de pico**

Con la información disponible se encontró una relación entre las variables tiempo pico y gasto base, de acuerdo a lo acotado en la hipótesis uno.

La Figura 5, que muestra el comportamiento histórico seguido entre *Q<sub>bi</sub>* y *tp* para los eventos extremos anuales en la estación Huites, permite establecer los universos de discusión correspondientes los cuales se resumen en la Tabla 1.

En el aparente caos sugerido por la Figura 5, se observa que una cantidad importante de puntos se ubica en el intervalo (10.400) m<sup>3</sup>/s. Es posible distinguir que los puntos históricos se agrupan en pequeños cúmulos, los cuales permiten definir los subconjuntos de los universos de discusión, así como la amplitud de las funciones de membresía correspondientes.

El número de subconjuntos para cada variable depende de la extensión del universo respectivo, así como de la precisión que se desee en la respuesta del modelo. Por otra parte, la longitud, el espaciamiento y la forma de los subconjuntos en cada universo de discusión se rigen básicamente por el comportamiento de las variables.

VARIABLE	DESCRIPCIÓN	UNIDADES	RANGO	
			MÍNIMO	MÁXIMO
<i>Q<sub>bi</sub></i>	Gasto base inicial (entrada)	m <sup>3</sup> /s	0	850
<i>tp</i>	Tiempo pico (salida)	días	0	8

Tabla 1. Variables del sistema y universos de discusión

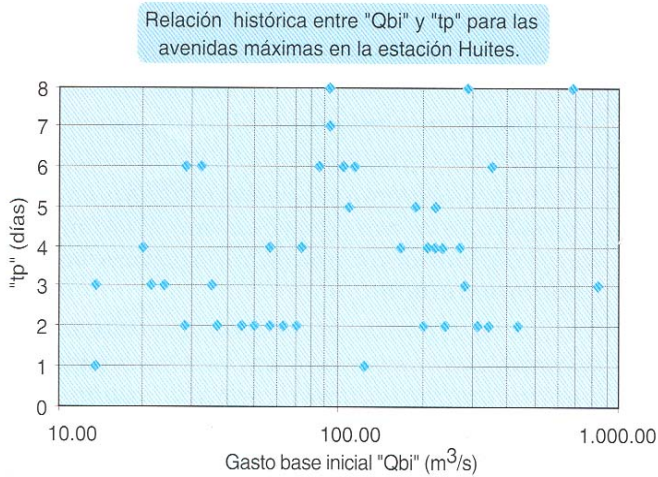


Figura 5. Comportamiento histórico de las variables del modelo

GASTO BASE INICIAL m³/s	MEMBRESÍA		
	SUBCONJUNTO	IZQUIERDA	CENTRO
A	0	16	20
B	19	25	29
C	29	30	35
D	35	43	54
E	52	60	80
F	77	89	103
G	102	109	121
H	119	127	160
I	159	182	197
J	197	210	220
K	220	221	230
L	230	251	260
M	260	280	290
N	289	300	305
O	304	320	340
P	335	355	400
Q	395	449	550
R	525	675	725
S	711	779	850

Tabla 2. Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía

TIEMPO PICO días	MEMBRESÍA		
	SUBCONJUNTO	IZQUIERDA	CENTRO
A	0	1	2
B	1	2	3
C	2	3	4
D	3	4	5
E	4	5	6
F	5	6	7
G	6	7	8

Tabla 3. Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía

En las Tablas 2 y 3 se resumen las cotas de los Subconjuntos correspondientes a los universos de discusión.

Las cotas izquierda, centro y derecha corresponden a los vértices de las funciones triangulares de membresía. Al observar la información de las Tablas 2 y 3, se intuye que el comportamiento de la variable  $Q_{bi}$  ha sido considerado radicalmente diferente al de la variable  $tp$ .

La simetría de los Subconjuntos de esta última variable contrasta con la no uniformidad del universo de la variable  $Q_{bi}$ . En términos de experiencia, el diseño de este sistema presupone que la variable dominante en el modelo es  $Q_{bi}$ , de manera que los Subconjuntos correspondientes a este universo deben ser cuidadosamente establecidos (propuestos por el experto). En caso de desconocer el comportamiento funcional de la variable, podrían sugerirse universos uniformes, los cuales se ajustarían al comportamiento real en la etapa llamada de "ajuste del sistema". En este caso y por simplicidad, se supone una distribución uniforme al universo de discusión de la variable de salida  $tp$ .

Al establecer las reglas lógicas que formarán la base del conocimiento se llega al punto crítico del planteamiento del sistema. Su obtención es posible en cualquiera de dos sentidos.

- Vía el conocimiento experto.

Información obtenida de la experiencia cotidiana y traducida en términos borrosos a partir de argumentaciones verbales.

- Vía inferencia.

Basada en información estadística del fenómeno.

En cualquier caso, la base será determinada relacionando las variables de entrada con la variable de salida según las proposiciones (1) y/o (4). En este estudio, la base de conocimiento que ha sido determinada vía inferencia se presenta en la Tabla 4

$Q_{bi}$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
$tp$	B	C	F	B	C	G	F	A	D	C	D	B	C	G	B	F	B	G	C

Tabla 4. Base de conocimientos borrosos para caracterizar el tiempo pico

### Etapa de ajuste del sistema

A continuación se procede a la última etapa de la modelación borrosa llamada ajuste del sistema. En esta etapa se considera al modelo de manera que reproduzca adecuadamente el comportamiento de la variable de salida  $tp$ , auxiliándose para ello de la información histórica disponible. El ajuste fino se consigue por ensayo (acierto-error) modificando las cotas propuestas en las Tablas 2 y 3.

Las modificaciones a las reglas de la base de conocimiento propuesta en la Tabla 4 producirán cambios más bruscos en la respuesta del modelo. Es importante señalar que las Tablas 2, 3 y 4 muestran los valores finales considerados, los cuales fueron ajustados usando solamente el 50% de la información histórica disponible.

La etapa de ajuste requiere una inversión de tiempo considerable previo a la puesta en operación de un modelo borroso. Como ya se mencionó en este trabajo, la base de conocimiento (Tabla 4) asocia las variables involucradas en el modelo. También se dijo que las reglas de correspondencia de la base son aplicables hasta cierto grado, el cual queda determinado por la función de membresía asociada.

**Ejemplo 1:** Suponga que al inicio de la tormenta el  $Q_{bi}$  es  $109 \text{ m}^3/\text{s}$ . Este valor se ubica en el conjunto G (según la Tabla 2). Con el valor de  $Q_{bi}$ , los datos correspondientes al subconjunto G y la Tabla 4, se establece que la regla lógica aplicable en este caso se escribe como:

"Como el valor de membresía para un  $Q_{bi} = 109 \text{ m}^3/\text{s}$  es 1.0, entonces la regla que aplica sobre el tiempo pico, subconjunto F (Tabla 3), tiene un valor de membresía igual a 1.0. De la Tabla 3, para el subconjunto F y valor de membresía 1.0 el tiempo de pico asociado a  $Q_{bi} = 109 \text{ m}^3/\text{s}$  es  $tp = 6$  días"

**Ejemplo 2:** Suponga que al inicio de la tormenta el  $Q_{bi}$  es  $8 \text{ m}^3/\text{s}$ . Este valor se ubica en el conjunto A (según la Tabla 2). Con el valor de  $Q_{bi}$ , los datos correspondientes al subconjunto A y la Tabla 4, se establece que la regla lógica aplicable en este caso se escribe como:

"Como el valor de membresía para un  $Q_{bi} = 8 \text{ m}^3/\text{s}$  es 0.5, entonces la regla que aplica sobre el tiempo pico, subconjunto A (Tabla 3), tiene un valor de membresía igual a 0.5. De la Tabla 3, para el subconjunto A y valor de membresía 0.5 el tiempo de pico asociado a  $Q_{bi} = 8 \text{ m}^3/\text{s}$  se calcula de la siguiente manera:

Se modifica la función de membresía A correspondiente al tiempo de pico con un valor  $C'=0.5$ , de manera que la función de triangular se transforma en una función trapezoidal de membresía, ver Figura 3.

Se calcula la abscisa del centro de gravedad de la función modificada. Dicha coordenada equivale al tiempo de pico asociado a  $Q_{bi}$  y en este caso  $tp= 1$  día."

**Correlación histórica de los tiempos pico con respecto a los tiempos base**

Como complemento al modelo borroso para la determinación del  $tp$ , se propone correlacionar ordinariamente los tiempos base históricos con sus correspondientes tiempos pico, usando para ello un análisis de regresión lineal según el cual:

$$tb = 1.1214tp + 2.7975; \quad (R^2 = 0.8124) \tag{7}$$

mientras que para el tiempo de recesión:

$$tr = td - tp \tag{8}$$

**Resultados de la predicción de las variables temporales**

Usando consecutivamente el modelo borroso para la predicción del  $tp$  y el modelo de regresión lineal para la

determinación del  $tb$  y puesto que ambas variables se asocian con  $tr$  según la ecuación (8), pueden destacarse los siguientes resultados:

- Error promedio absoluto en la inferencia borrosa de  $tp$ : 0.55 días.
- Error promedio absoluto de regresión para la inferencia de  $tb$ : 0.92 días.
- Error promedio absoluto en la inferencia ordinaria de  $tr$ : 0.67 días.

La Figura 6 muestra gráficamente la respuesta del modelo borroso comparando sus inferencias con respecto a los valores observados.

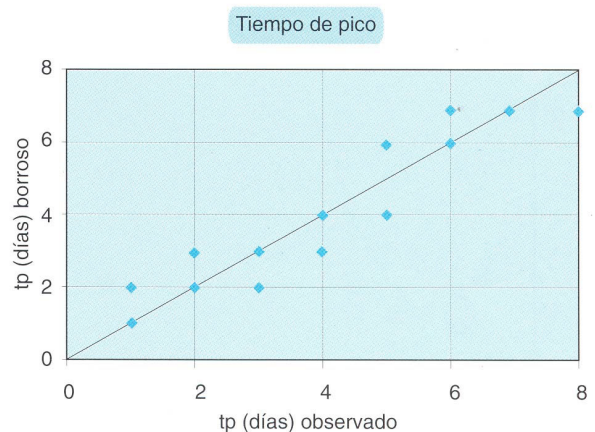


Figura 6. Respuesta del modelo borroso en la inferencia del tiempo pico

Concluida la predicción de las variables temporales y en particular la del tiempo pico, nos encontramos en condiciones de complementar la primera hipótesis hecha al inicio de esta modelación:

- **Hipótesis dos.** Una vez que se ha establecido un modelo que permita inferir un valor posible de "tp" podremos inferir otro sobre "Qdp", siempre y cuando sepamos algo acerca de la tendencia que sigue el crecimiento del gasto a través del tiempo, una vez iniciada la avenida.

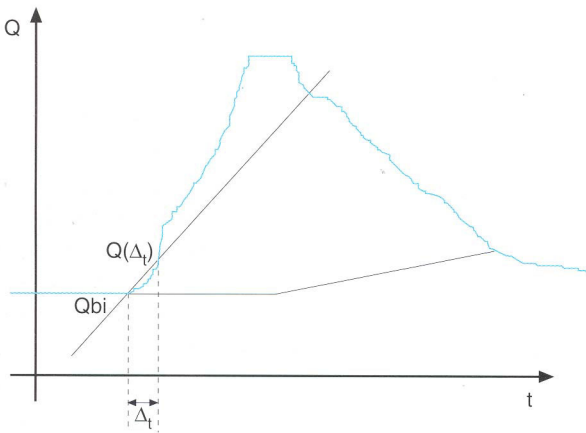
**Modelo borroso para la determinación del gasto pico "Qdp"**

Bajo la hipótesis planteada, el sistema borroso a desarrollar para la predicción del gasto "Qdp" funcionará bajo dos ideas fundamentales:

1. Si el evento en observación corresponde a una avenida extraordinaria, entonces tanto el tiempo pico inferido en términos borrosos como la tendencia observada por la avenida determinan el valor "Qdp".
2. La tendencia ( $\Delta Q/\Delta t$ ) quedará claramente establecida, lo suponemos así, cuando hayan transcurrido 0.5 días para avenidas cuyo "tp" inferido sea igual a uno y 1 día para avenidas cuyo "tp" inferido sea superior a uno. Resulta claro que la tendencia observada por la avenida no responde a una ley lineal y, lo que es más, sea cual fuere dicha ley, ésta no es constante.

La variable "tendencia" considerada para la modelación corresponde a la pendiente de la recta secante que une los puntos  $Q_{bi}$  y  $Q(\Delta t)$ , *Figura 7*, en donde  $\Delta t$  (incremento de tiempo) representa el tiempo que se supone suficiente para que quede claramente establecida dicha tendencia. Bajo las ideas expuestas, esperamos que las variables Tendencia y  $t_p$ , contengan la información mínima necesaria para la estimación de un valor posible de  $Q_{dp}$ . Se hace notar, que según la teoría borrosa, la expresión "valor posible" sustituye a "valor probable" (Soto, 1997)

Analizando los hidrogramas de escurrimiento directo para las avenidas máximas registradas en la estación Huites es posible establecer las cotas de los universos de discusión correspondientes al modelo que se pretende, información que se encuentra resumida en la *Tabla 5*.



**Figura 7.** Tendencia de la avenida transcurridas las primeras horas de iniciado el escurrimiento

VARIABLE	DESCRIPCIÓN	UNIDADES	RANGO	
			MÍN.	MÁX.
Tendencia	Tendencia (entrada)	m <sup>3</sup> /s/día	0	5000
$t_p$	Tiempo pico (entrada)	días	0	9
$Q_{dp}$	Gasto de pico (salida)	m <sup>3</sup> /s	0	9000

**Tabla 5.** Variables del sistema y universos de discusión.

**Etapa de ajuste del sistema**

Para mostrar el efecto que provoca incorporar información al modelo, se proponen dos etapas independientes de ajuste.

En la primera se hace uso de tan sólo 16 de los 44 registros históricos disponibles, aproximadamente un 37% del total. En este caso puede destacarse que el 43% de las inferencias estiman el valor de  $Q_{dp}$  con un error inferior al 30% con respecto al valor observado, mientras que el 62% de las inferencias no sobrepasan el 50% de error en la predicción de dicho gasto. La *Figura 8* muestra la respuesta del modelo de inferencia para la primera etapa de ajuste.

TENDENCIA m <sup>3</sup> /s/día	MEMBRESÍA		
	SUBCONJUNTO	IZQUIERDA	CENTRO
A	0	0	8.3
B	8.3	20	66
C	66	75	83
D	83	95	150
E	150	158	412
F	412	433	666
G	666	683	845
H	845	870	975
I	975	1050	1125
J	1125	1200	1900
K	1900	2000	2400
L	2400	3000	3500
M	3500	4000	5000

TIEMPO PICO días	MEMBRESÍA		
	SUBCONJUNTO	IZQUIERDA	CENTRO
A	0	1	1.5
B	1.3	2	2.5
C	2.3	3	3.5
D	3.3	4	4.5
E	4.3	5	5.5
F	5.3	6	6.5
G	6.3	7	7.5
H	7.3	8	9

**Tabla 6 y 7.** Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía

En una segunda etapa, se propone realizar el ajuste del modelo con 32 de los 44 datos disponibles, aproximadamente un 73% del total. Las *Tablas 6, 7 y 8* contienen la descripción de los subconjuntos borrosos correspondientes a cada universo de discusión.

En la *Tabla 9* se muestra la base de conocimiento borrosa establecida para esta segunda etapa.

La *Figura 9* ilustra los resultados obtenidos en la segunda etapa de ajuste y que, comparados con los obtenidos en la primera etapa de ajuste, muestran notables mejoras en la inferencia de las avenidas extremas registradas.

De los resultados obtenidos en esta segunda etapa de ajuste puede destacarse que para este caso, el 64% de las inferencias estiman un valor de " $Q_{dp}$ " con un error inferior al 30% con respecto al valor observado mientras que el 80% de las inferencias no sobrepasan el 50% de error en la predicción de dicho gasto.

Como puede observarse, a pesar de lo pobre que resulta la información que alimenta al sistema para el primer  $\Delta t$  propuesto y el hecho en extremo importante de que una de las variables de entrada es a su vez una inferencia borrosa, el modelo responde satisfactoriamente en un porcentaje amplio de los casos estudiados.

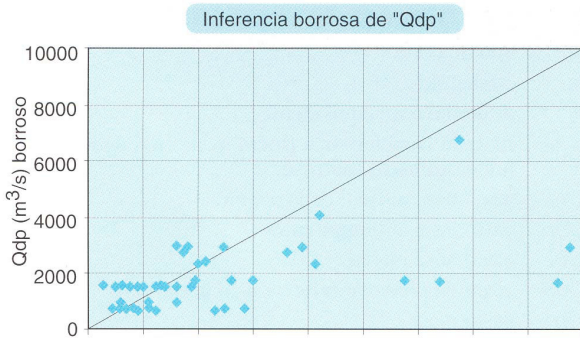


Figura 8. Resultados de la inferencia borrosa de Qdp en la primera etapa de ajuste

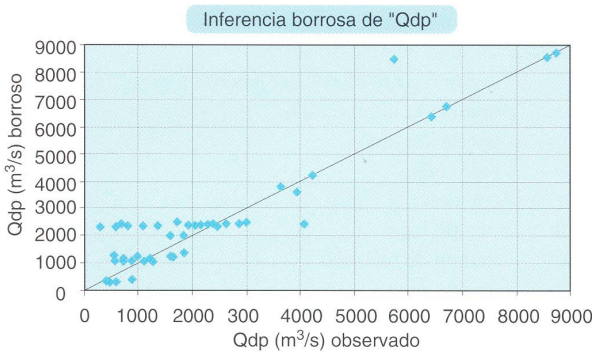


Figura 9. Resultados de la inferencia borrosa de Qdp en la segunda etapa de ajuste

CONCLUSIONES

- La inferencia borrosa sugerida, se dividió en dos etapas principales. En la primera de ellas, se determinan los valores posibles de las variables temporales "tp", "tb" y "tr" suponiendo que el tiempo pico se encuentra ligado a una memoria histórica, la cual puede interpretarse en términos del gasto que escurre al inicio de la tormenta (Qbi). Se establece un modelo de regresión para la inferencia del tiempo base. En la matemática ordinaria y en concepciones más sofisticadas como las redes neuronales, resultaría bastante difícil y hasta imposible

GASTO PICO "Qdp" m³/s	MEMBRESÍA		
	IZQ.	CENTRO	DER.
EP (pequeño en extremo)	0	510	930
MP (muy pequeño)	577	712	2010
P (pequeño)	2010	2062	3075
M (medio)	3007	3052	4695
G (grande)	3930	4117	6022
MG (muy grande)	5955	6750	8250
EG (grande en extremo)	7800	8385	9000

Tabla 8. Variables del sistema. Subconjuntos borrosos y membresía

TIEMPO PICO	TENDENCIA									
	A	B	C	D	E	F	G	I	I	.
H	.	MP	.	MP	.	.	.	.	.	.
G	.	P	.	MP	.	.	.	.	.	.
F	.	MP	EP	.	MP	.	.	.	.	.
E	.	EP	.	MP	.	.	.	.	.	.
D	.	MP	MP	EP	MP	.	.	.	.	.
C	EP	EP	MP	P	P	EG	P	I	.	.
B	.	MP	.	.	.	EG	MP	I	N	.
A	.	.	.	.	.	.	MP	.	.	.

. No conocida con sistema

Tabla 9. Base de conocimientos borrosos para caracterizar el gasto pico

- separar las variables temporales del resto como se ha conseguido aquí con relativa facilidad.
- En una segunda etapa, se establece una metodología para inferir el gasto pico, "Qdp", especulando sobre la relación de éste con respecto a la tendencia seguida por la avenida en cierto período de tiempo. Se debe considerar que tan sólo en una primera aproximación, el modelo predice satisfactoriamente el gasto antes mencionado en el 80% de los casos y haciendo uso de sólo el 73% de la información disponible, porcentaje que se puede incrementar sustancialmente si se utiliza el 100% de la información (Soto, 1997). Las dos etapas consecutivas de ajuste demuestran la congruencia temática del modelo al alimentarse de mayor información. La predicción puede complementarse al establecer etapas de inferencia ulteriores y posteriores con períodos de tiempo más reducidos. A diferencia de la modelación ordinaria, la modelación borrosa "aprende" al extender y perfeccionar la base de conocimiento sin necesidad de modificar la estructura fundamental o de ciclos de retroalimentación como en el caso del entrenamiento de una red neuronal.
- Los modelos de inferencia borrosa pueden ser desarrollados aún con datos históricos escasos. Puesto que en la realidad la información disponible con propósitos de modelación no abunda, la anterior característica de los modelos borrosos es una cualidad única que, por sí sola, es digna de atención. El modelo de inferencia propuesto en este trabajo, se desarrolla en estos términos, razón por la cual se proponen dos etapas consecutivas de ajuste que muestren la capacidad del modelo a reproducir el fenómeno con información limitada.
- La modelación borrosa hace muy pocas preguntas acerca de la naturaleza de los eventos que pretende reproducir. Particularmente, se debe recordar que el modelo establecido intenta predecir avenidas máximas independientemente del período de precipitación en que suceden, haciendo a este tipo de modelación mucho

más general. La capacidad que tiene la matemática borrosa para manejar problemas conceptualmente más complejos radica en pensar que toda variable relacionada a los eventos en estudio, tiene algún grado de participación. En la matemática ordinaria, la participación o influencia de las variables existe o no existe.

- La modelación e inferencia borrosa es versátil. En este trabajo ya se ha comentado acerca de los dos sentidos de razonamiento que permiten establecer el alma del modelo borroso representada por la base de conocimientos borrosos. En este caso la base de conocimiento se estableció vía inferencia; lo anterior resulta evidente al observar los espacios vacíos de la *Tabla 9*, aunque el problema pudo plantearse bajo la idea de que existía cierto conocimiento de la relación que guardan las variables involucradas en el fenómeno de estudio.
- En el mismo sentido de versatilidad, de acuerdo a la forma en la que se ha ajustado el modelo de inferencia borrosa, éste puede atenuar la desviación absoluta con respecto a los valores observados, o lo que es más, podría condicionarse su respuesta en dos sentidos: optimista o pesimista, y donde estos conceptos se encuentran ligados al tipo de fenómeno que se estudia y al propósito de la inferencia.
- Bajo las ideas expuestas, puede verificarse en la *Figura 6*, que para el caso de las variables temporales, éstas pueden inferirse aceptablemente para avenidas con tiempos pico mayores a dos días. La anticipación de dicho tiempo es en estos casos de al menos 1 día y hasta de 6 días para tiempos pico iguales a dos y ocho respectivamente.
- Como se ha mencionado, los resultados obtenidos en la estimación de "*Qdp*" hacen pensar que series consecutivas de inferencias bajo la misma estructura de conocimiento y para incrementos de tiempo más pequeños permitirían llevar la efectividad del modelo fácilmente a niveles superiores al noventa por ciento de los casos tratados. Se observa que la implantación del sistema no requeriría *ninguna* modificación a la estructura actual de seguimiento, pues unas pocas centrales serían capaces de llevar el control de las inferencias en puntos críticos de forma casi automatizada, usando para ello información obtenida vía telefónica y de manera en extremo económica si se compara con la implementación de un sistema GIS.
- Puede observarse que el modelo propuesto queda sustentado en dos hipótesis fundamentales que aunque simples en su enunciado, tienen serias implicaciones. Debe tenerse presente que el modelo presupone que la avenida en estudio corresponde a una del tipo máximo. En otro caso, y adicionalmente a lo comentado, la presente modelación deberá complementarse con un criterio que establezca si la tormenta iniciada se traducirá en un avenida máxima o, en su defecto, prevenga sobre las limitaciones del presente modelo. Dicho criterio podría formularse en términos borrosos.

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	alfa de corte
$\subset$	contenido
$\neq$	diferente o no equivalente
$\mu_A(x)$	función característica (membresía) del subconjunto ordinario (borroso) $A$
$Q_{bf}$	gasto base al final de la avenida
$Q_{bp}$	gasto base al tiempo pico
$Q_{bi}$	gasto base inicial
$Q_{dp}$	gasto de pico con referencia al gasto base
$Q_p$	gasto pico
$\Rightarrow$	implicación
$\Delta$	incremento
$MAX$	máximo
$\vee$	máximo (símbolo de disyunción lógica)
$\geq$	mayor o igual
$\leq$	menor o igual
$MIN$	mínimo
$\wedge$	mínimo (símbolo de conjunción lógica)
$\cap$	operación intersección
$\cup$	operación unión
$\forall$	para todo
$\in$	pertenece
$t_b$	tiempo base
$t_r$	tiempo de recesión
$t_p$	tiempo pico
$t_{pc}$	tiempo pico, centro
$t_{pd}$	tiempo pico, derecha
$t_{pi}$	tiempo pico, izquierda
$V_d$	volumen de escurrimiento directo después del tiempo pico
$V_p$	volumen de escurrimiento directo hasta el tiempo pico
$V_t$	volumen total de escurrimiento

## REFERENCIAS

- Fujita, M., Zhu, M. y Nakao, T. (1992) *An application of fuzzy set theory to runoff prediction*. Sixth IAHR International Symposium on Stochastic Hydraulics. Taipei, 727-734.
- Fujita, M. y Hayakawa, H. (1989) *An application of fuzzy inference to runoff prediction*. Pacific International Seminar on Water Resources Systems
- Kaufmann, A. (1982) Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos para el uso de ingenieros, vol. I. Elementos teóricos de base. CECSA, México
- Soto, G. (1997) Sistemas de control borroso. Acerca de los aprovechamientos hidráulicos. Tesis de maestría, DEPFI, UNAM.
- Toledo, V. (1996a) Predicción de escurrimientos usando redes neuronales. Congreso Nacional de Hidráulica. Acapulco México.
- Toledo, V. (1996b) Redes neuronales en modelado hidrológico: predicción de avenidas en la presa Huites. Tesis de maestría, DEPFI, UNAM.
- Zadeh, L. A. (1975) Calculus of fuzzy restriction. Fuzzy Sets and Their Applications to Cognitive and Decision Process. Academic Press, NY.