

DIMENSIONAMIENTO DE TUBERÍAS CON SALIDAS MÚLTIPLES CONVENCIONALES Y TELESCÓPICAS CON DISTRIBUCIÓN DISCRETA DE CAUDALES

Vicente Ángeles, Ramón Arteaga, Laura A. Ibáñez

Departamento de Irrigación, Universidad Autónoma Chapingo
km 38.5 Carretera México - Texcoco, Chapingo, Estado de México, CP. 056230
vangeles@correo.chapingo.mx

Resumen: Considerando una distribución discreta de caudal en la tubería con salidas múltiples convencional con gasto constante en cada salida, se ajusta mediante regresión no lineal un modelo de tipo potencial al factor que corrige la pérdida de carga por fricción, que se provoca en el último segmento de tubería en el extremo de aguas abajo; con este modelo se calcula con mucha facilidad la pérdida de carga por fricción que se da en este tipo de tubería en función del número de salidas que posea. A partir de esto se logra establecer funciones que dependen solo del número de salidas y que permiten determinar la longitud de estas tuberías bajo cualquier condición de pendiente, aplicando alguna de las técnicas numéricas conocidas para encontrar raíces de ecuaciones no lineales. Después, mediante simulación se genera un término compensatorio que posibilita aplicar el procedimiento de solución analítica de una ecuación cúbica en su forma reducida, al cálculo de la longitud para este mismo tipo de tuberías en todo tipo de pendientes. La comparación de resultados con el método paso a paso aplicado a este tipo de tuberías, indica que las ecuaciones analíticas propuestas presentan suficiente precisión en la mayoría de los casos. Asimismo, se propone una expresión analítica simple que permite determinar la longitud del tramo de aguas abajo en una tubería con salidas múltiples telescópica; su sencillez no le resta precisión cuando se comparan sus resultados con las de ecuaciones más complejas. Finalmente, la viabilidad de cualquier solución alcanzada se puede visualizar fácilmente, al delinear el comportamiento de la variación de la carga de presión a lo largo de la tubería con salidas múltiples convencionales o telescópicas, utilizando las funciones propuestas.

INTRODUCCIÓN

Las tuberías con salidas múltiples son un componente esencial en cada uno de los sistemas de riego presurizados existentes; sean estos de alta (aspersión), media (microirrigación) o baja presión (tuberías multicompuertas). El diseño hidráulico correcto de estas tuberías, es una fase importante en el éxito de estos sistemas de riego.

El diseño hidráulico de una tubería con salidas múltiples está condicionado por la carga de presión en su entrada y por la uniformidad de aplicación del agua; esta última, depende de la pérdida de carga total a lo largo de la tubería, de la topografía del terreno, así como de las características hidráulicas del emisor. La variación en el caudal del emisor esta en función de la variación de la carga de presión a lo largo de la tubería, la cual es el resultado del efecto com-

binado de la pérdida de carga total y la pérdida o ganancia de carga debido a la pendiente del terreno donde se localiza.

Una gran cantidad de los análisis hidráulicos que se hacen de estas tuberías, están fundamentados en el procedimiento de diseño tradicional, en el cual, el diámetro y la longitud de la tubería son conocidos de antemano (Wu y Gitlin, 1974; Scaloppi y Allen, 1993; Hathoot *et al.*, 1994; Anwar, 1999, 2000; Valiantzas 2002a; Ángeles *et al.*, 2007); a partir de estas características geométricas de la tubería, se calcula el resto de las variables tales como: carga de presión en la entrada, pérdida de carga total o uniformidad de aplicación. Sin embargo es frecuente el problema inverso, es decir, para un nivel de uniformidad de aplicación del agua y pendiente del terreno dados, seleccionar el diámetro o la longitud de la tubería, a fin de conservar la carga de presión de diseño en la entrada de la tubería y el límite

permitido de pérdida de carga total a lo largo de la misma; en este contexto, Valiantzas (1998) obtiene una ecuación explícita para el diseño directo de la longitud de una lateral horizontal, Valiantzas (2002b) presenta una ecuación algebraica simple para calcular la longitud de los tramos de diámetro diferente en una lateral telescópica de tal manera que su costo sea mínimo, Ravikumar et al. (2003) han propuesto una ecuación cuadrática para el diseño directo del diámetro de una lateral en riego por goteo, Detomini y Frizzone (2007) resuelven modelos hidráulicos numéricamente para determinar la longitud de una lateral con pendiente en riego por goteo con emisores convencionales y autocompensantes.

El progreso en tecnología computacional ha permitido el diseño y análisis hidráulico de tuberías con salidas múltiples mediante programación lineal, programación dinámica y métodos numéricos como el elemento finito (Kang y Nishiyama 1996); sin embargo, su aplicabilidad es escasa dado su alto grado de sofisticación y recursos de cómputo necesarios. Por ende, soluciones al diseño y análisis de este tipo de tuberías que sean suficientemente precisas, simples y fáciles de aplicar, constituyen una perspectiva atractiva a ser adoptada en procedimientos ingenieriles.

En esta investigación se simplifica el dimensionamiento de las tuberías con salidas múltiples convencionales y telescópicas mediante técnicas numéricas sencillas y ecuaciones analíticas simples, que permiten delinear el comportamiento de la variación de la carga de presión a lo largo de la tubería con salidas múltiples y, con ello, decidir sobre la viabilidad de la solución alcanzada.

DESARROLLO

Asumiendo una distribución continua y uniforme del caudal Q con salidas infinitas en toda la longitud L de la tubería (tramo de aguas arriba, Figura 1), la pérdida de carga por fricción en la tubería con salidas múltiples convencional

se computa con la fórmula:

$$hf_L = hf \left(\frac{1}{m+1} \right) = K \frac{Q^m}{D^n} L \left(\frac{1}{m+1} \right) \quad (1)$$

donde hf_L es la pérdida de carga por fricción en la tubería con salidas múltiples convencional, K representa una constante de homogenización de unidades que en ocasiones incluye un coeficiente de fricción (Manning, Hazen-Williams, Scobey, ...) que depende de la fórmula empleada para cuantificar la pérdida de carga por fricción hf en una tubería sin salidas en su longitud, Q caudal que transporta la tubería de inicio a final de la misma, D diámetro interno de la tubería, L longitud de la tubería y m y n exponentes del caudal y del diámetro interno de la tubería, respectivamente.

Mientras que al considerar una distribución discreta del caudal Q con salidas finitas en la longitud de tubería L con caudal constante en cada salida, la pérdida de carga por fricción en la tubería con salidas múltiples convencional se calcula mediante la fórmula:

$$hf_L = \sum_{i=1}^n hf_i = K \frac{q^m}{D^n} S \left(\sum_{i=1}^n i^m \right) \quad (2)$$

donde N número total de salidas, hf_i es la pérdida de carga por fricción en cada uno de los segmentos que constituyen la tubería con salidas múltiples, q es el caudal constante de cada una de las salidas, S es la distancia constante entre dos salidas consecutivas. Observando la figura 1 se puede establecer que $S = L/N$ y $q = Q/N$, entonces al sustituir S y q en la ec.(2) y comparar la expresión resultante con la ec.(1), se llega a:

$$F_c = \frac{1}{m+1} \cong \frac{\sum_{i=1}^n i^m}{N^{m+1}} = F_d \quad (3)$$

donde F_c y F_d son un factor de corrección por salidas múltiples, el primero para una distribución

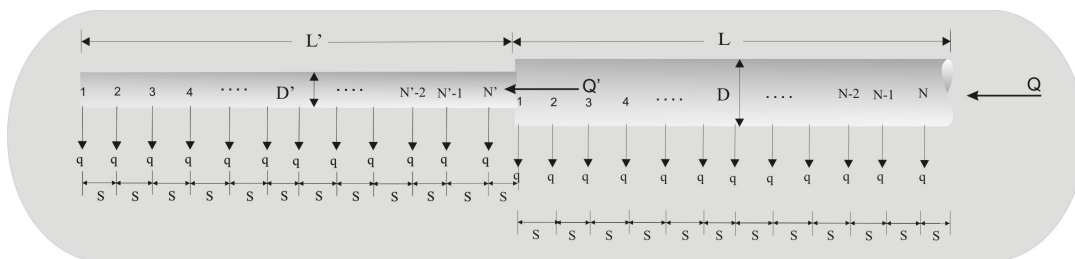
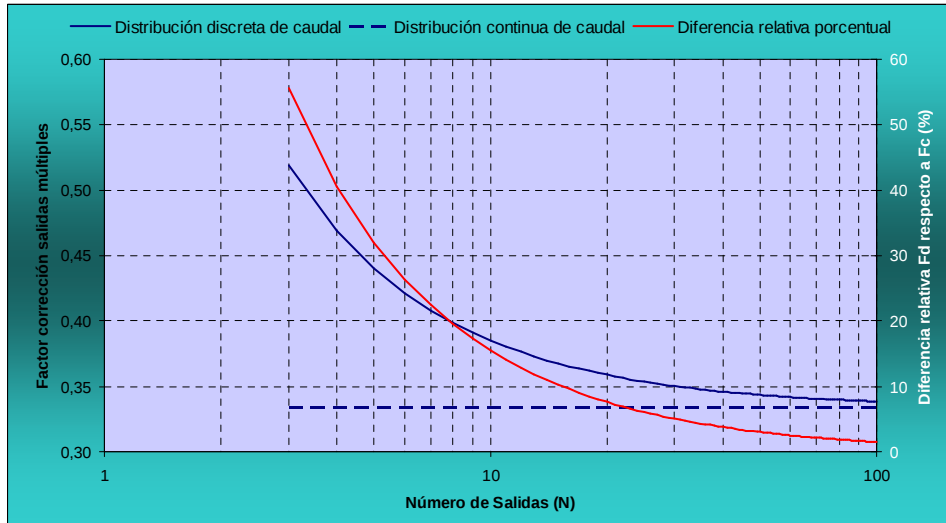


Figura 1. Tubería con salidas múltiples telescópica



Gráfica 1. Factores de corrección por salidas múltiples para usarse con Q y L

continua de caudal y el segundo para una discreta; los valores de estos 2 factores son menores a 1. Al comparar los resultados que se obtienen de F_c y F_d en función del número de salidas N (ec.(3) con $m = 2$), se encuentran grandes diferencias entre ellos para valores pequeños de N (Gráfica 1).

La variabilidad observada en la Gráfica 1 es amplia en valores pequeños de N , va de un 55.6 % para $N = 3$ hasta un 5 % para $N = 30$, con tendencia a una disminución de la variación relativa porcentual en valores elevados de N (1.5 % para $N = 100$). Cuando el valor de $m < 2$ (por ejemplo $m = 1.75$), la variabilidad disminuye, va de 50.2 % para $N = 3$, 4.6 % para $N = 30$ y 1.4 % para $N = 100$.

De acuerdo a Ramos y Denículi (1992), la ec.(1) con $Q = Nq = \frac{L}{S}q$ e introduciendo el efecto de la pendiente del terreno, se tiene que:

$$L = \left[\frac{\Delta h \pm S_t L}{\frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S^{-m}} \right]^{\frac{1}{m+1}} \quad (4)$$

donde Δh es la variación admisible de carga de presión a lo largo de toda la tubería, constituida por la máxima pérdida de carga H (numerador en ec.(4)) y el desnivel geométrico $\Delta Z = S_t L$ (adicionado en terrenos cuesta arriba y descontado en terrenos cuesta abajo), siendo S_t la pendiente natural del terreno en tanto por uno.

La ec.(4) permite determinar la longitud L de la tubería con salidas múltiples convencional conocidos Δh , S_t , q , S y D , bajo el supuesto de una distribución continua y uniforme del caudal. Cuando lo que se desea es determinar el diámetro (conocidas el resto de las variables), este se

despeja de la ec.(4). Sin embargo, el valor teórico del diámetro D_t así obtenido, rara vez coincidirá con uno comercial, sino que estará comprendido entre dos de ellos D y D' (Figura 1), tal que $D > D_t > D'$. Si se selecciona el diámetro D , la pérdida de carga en la tubería será inferior a H ; mientras que, si se opta el diámetro D' , la pérdida de carga resultará superior a H .

Surge así, la necesidad de diseñar una tubería con dos diámetros D y D' con pérdida de carga sensiblemente igual a H . Según Montalvo (2007), el cálculo de las longitudes L y L' de cada diámetro D y D' , respectivamente, viene haciéndose por tanteos. Se establecen unas longitudes iniciales y se calculan las pérdidas de carga en cada tramo que, al comprar su suma con H , aconsejan el tanteo de otras longitudes hasta lograr unas pérdidas lo más próximo posibles por defecto o iguales a H . Un procedimiento similar de ensayo y error, se puede efectuar con valores supuestos de N y N' y calculando la pérdida de carga en cada tramo de diámetro D y D' , con las ecuaciones propuestas por Ángeles *et al.* (2007). Para evitar este engorroso procedimiento, se han planteado algunas alternativas de solución como:

1. Denículi *et al.* (1992), con la hipótesis de una distribución continua y uniforme de caudal y $L_T = L + L'$, proponen la ecuación:

$$L' = \left[\frac{\left(\frac{D}{D_t} \right)^n - 1}{\left(\frac{D'}{D_t} \right)^n - 1} \right]^{\frac{1}{m+1}} \quad (5)$$

2. En tanto que Montalvo (2007), para una distribución discreta de caudal y caudal constante en cada salida plantea:

$$F'N'^{m+1} = \frac{H - K_a K \frac{q^m}{D^n} S(r + N_T F_T - 1) N_T^m}{\left(\frac{1}{D'^n} - \frac{1}{D^n} \right) K_a K q^m S} \quad (6)$$

donde K_a es un coeficiente mayorante para introducir las pérdidas de carga localizadas, r es la relación entre la longitud del inicio de la tubería a la primera salida y la separación constante S entre salidas consecutivas, N_T la suma de N y N' , F_T el factor de corrección por salidas múltiples para N_T , y F' factor de corrección por salidas múltiples para N' . La ec.(6) se resuelve mediante una tabla, en la que en función de m y N' se da el valor de $\log(F'N'^m + 1)$, con $F'N'^{\frac{1}{m+1}}$ calculado de la siguiente manera:

$$F'N'^{m+1} = \frac{N'^{m+1}}{m+1} + \frac{N'^m}{2} + \frac{N'^{m-1}\sqrt{m-1}}{6} \quad (7)$$

Así, tanto la ecuación propuesta por Deniculi *et al.* (1992) como la propuesta por Montalvo (2007), presentan ventajas y desventajas relativas; la primera es sencilla pero involucra imprecisión en los resultados para valores pequeños de N , mientras que la segunda es más exacta pero depende de valores tabulados. *Esto conlleva a buscar un planteamiento que reúna simplicidad y precisión sin depender de valores tabulados.*

Para evitar realizar la sumatoria que aparecen en la ec.(2), se le ajustó mediante regresión no lineal un modelo potencial, para valores de m igual a 1.75, 1.85, 1.9 y 2.0. Para esto, se elevó a

la potencia $1/(m+1)$ cada valor de la sumatoria desde que i era igual a 1 hasta N (con N de 2 a 100); a los valores resultantes junto con los valores de N se les ajustó un modelo lineal, encontrándose que concuerda satisfactoriamente ($r^2 = 1$); así por ejemplo, cuando a m se le asignó el valor de 1.85, el modelo lineal resultante fue:

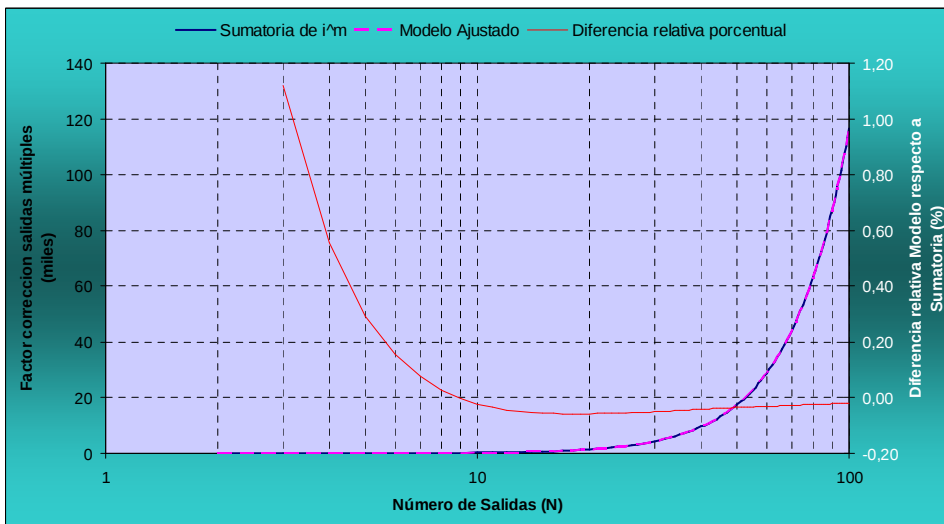
$$\left[\sum_{i=1}^N i^{1.85} \right]^{\frac{1}{2.85}} = 0.3406 + 0.69626N \quad (8)$$

Al analizar los 4 modelos lineales para valores de m igual a 1.75, 1.85, 1.9 y 2.0, se observó que la ordenada al origen a efectos prácticos permanecía constante, en tanto que la pendiente adoptaba valores muy similares a $\frac{1}{(m+1)^{\frac{1}{m+1}}}$. Así, generalizando la expresión 8 para cualquiera de los 4 valores de m , se obtiene el modelo:

$$\sum_{i=1}^N i^m = \left[0.3406 + \frac{N}{(m+1)^{\frac{1}{m+1}}} \right]^{m+1} = F_a \quad (9)$$

donde F_a es el factor de corrección por salidas múltiples que se propone en esta investigación, los valores de este factor son evidentemente mayores a 1. En la Gráfica 2 se representan ambos miembros de la ec.(9) cuando m tiene el valor de 1.75.

En la Gráfica 2 se observa que a partir de la salida 6 la variación porcentual se conserva por debajo de 0.2 % (este límite se mantiene cuando a m se le asignan valores de 1.8, 1.85, 1.9 y 2). Esto indica que se puede emplear el modelo ajustado en los problemas de dimensionamiento de las tuberías con salidas múltiples, esperando resultados plausibles.



Gráfica 2. Factores de corrección por salidas múltiples para usarse con q y S

Si se sustituye el modelo ajustado de la ec.(9) en la ec.(2), se tiene:

$$hf_L = K \frac{q^m}{D^n} S \left[0.3406 + \frac{N}{(m+1)^{\frac{1}{m+1}}} \right]^{m+1} = \frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S \left[0.3406 + (m+1)^{\frac{1}{m+1}} + N \right]^{m+1} \quad (10)$$

Para resolver los problemas de diseño, tanto de longitud como de diámetro se establece la siguiente ecuación, en la cual para generalizar, se incluye el desnivel geométrico

$$\Delta h = hf_L + \Delta Z = \frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S [0.3406 + (m+1)^{\frac{1}{m+1}} + N]^{m+1} + S_t S N \quad (11)$$

donde ΔZ es el desnivel geométrico, con signo positivo para pendientes ascendentes y signo negativo para las descendentes.

La ec.(11) tiene solución analítica directa cuando la tubería con salidas múltiples está colocada a nivel ($S_t = 0$, $H = hf_L = \Delta h$), bajo esta circunstancia el valor de N es:

$$N = \left(\frac{\Delta h}{\frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S} \right)^{\frac{1}{m+1}} - 0.3406 + (m+1)^{\frac{1}{m+1}} \quad (12)$$

Para determinar N y por tanto L , la ec.(12) se modifica (por inducción de la solución clásica de tanteos por tramos para determinar la pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples telescópica), de la siguiente manera:

$$N' = \left[\frac{h_d}{\frac{1}{m+1} K q^m \left(\frac{1}{D^n} - \frac{1}{D^n} \right) S} \right]^{\frac{1}{m+1}} - 0.3406 + (m+1)^{\frac{1}{m+1}} \quad (13)$$

En la que h_d es la carga de presión disponible remanente, una vez que se ha restado a la máxima pérdida de carga H , la pérdida de carga por fricción en una tubería convencional con salidas múltiples con diámetro D , caudal Q_T (suma de Q y Q') y longitud L_T (suma de L y L'), bajo cualquier condición de longitud del inicio de la tubería a la primera salida, que habría que ajustar.

La solución de la ec.(11) para encontrar N , en los casos en que la tubería con salidas múltiples esté colocada en pendiente ascendente o descendente ($S_t \neq 0$), se lleva a cabo mediante técnicas numéricas. Existe un caso único de solución

analítica (considerando distribución continua de caudal), cuando la tubería con salidas múltiples está colocada en pendiente descendente y, se plantea que la energía potencial que se gana por el desnivel geométrico ΔZ sea de una magnitud igual a la pérdida de carga por fricción hf_L ; bajo este supuesto, Detomini y Frizzone (2007), presentan la siguiente ecuación para determinar el desnivel geométrico ΔZ :

$$\Delta Z = S_t L = \frac{\Delta h}{\left[\frac{m}{(m+1)^{\frac{m+1}{m}}} \right]} \quad (14)$$

El valor del desnivel geométrico ΔZ resultante, se utiliza como numerador en la ec.(4) para determinar la longitud de la tubería buscada.

En la solución numérica de la ec.(11) para tuberías con salidas múltiples convencionales colocadas en pendiente uniforme ascendente la carga de presión mínima se presenta al final de la tubería, y por tanto, una vez dimensionada se sabe que se está respetando la variación admisible de carga de presión Δh ; mientras que, cuando la tubería está colocada en pendiente descendente, no se tiene la certeza de que se esté respetando el límite de variación admisible de carga de presión Δh (dado que la carga de presión mínima, en muchos casos, se presenta en un punto intermedio de la longitud de la tubería), aunque la diferencia de cargas de presión entre inicio y final de tubería si cumpla tal requisito.

Para averiguar el comportamiento de la ec.(11) en una tubería con salidas múltiples convencional colocada en pendiente uniforme descendente, se analiza la función que describe la variación de N según hf_L y ΔZ

$$f(N) = \frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S \left[0.3406 + (m+1)^{\frac{1}{m+1}} + N \right]^{m+1} - S_t S N \quad (15)$$

Al derivar la función anterior respecto a N e igualar a cero, se encuentra el valor de N con variación máxima $f(N_{mx})$, de donde resulta:

$$N_{mx} = \left[\frac{S_t S}{K \frac{q^m}{D^n} S} \right]^{\frac{1}{m}} - 0.3406 + (m+1)^{\frac{1}{m+1}} \quad (16)$$

Al sustituir el valor de N_{mx} de la ec.(16) en la (15), se localiza un valor de la función $f(N_{mx})$, que permite redefinir la variación admisible de carga de presión Δh a Δh_m en la solución de la ec.(11). Si el valor absoluto de $f(N_{mx})$ es menor a Δh , entonces:

$$\Delta h_m = \Delta h + f(N_{mx}) \quad (17)$$

Esta estrategia de solución de la ec.(11) indica que $hf_L \geq \Delta Z$ (con un valor modificado y menor de la variación admisible de carga de presión Δh_m entre los extremos de la tubería), que es justo la condición de diseño deseable en el riego presurizado; dado que si $hf_L \leq \Delta Z$ según Tarjuelo (2005), se requieren mayores diámetros, y por tanto mayor inversión. En el caso límite $hf_L = \Delta Z$, el valor asignado a la variación admisible de carga de presión Δh_m en la ec.(11) es cero; lo que deberá interpretarse como el hecho de que la pérdida de carga por fricción en la tubería con salidas múltiples convencional se compensó a través del desnivel geométrico. Cuando el valor absoluto de $f(N_{mx})$ es mayor a Δh , se asigna a Δh_m el valor de $-\Delta h$. Así, cualquiera que sea la condición del valor absoluto de $f(N_{mx})$ en relación a Δh , la ec.(11) queda como:

$$\Delta h_m = \frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S [0,3406 + (m+1)^{\frac{1}{m+1}} + N]^{m+1} - S_t S N \quad (18)$$

Se propone a continuación una aproximación analítica que evita la solución numérica de la ec.(11) cuando se considera pendiente uniforme en la determinación de N ; para ello, se hace el siguiente cambio de variable:

$$X = 0.3406(m+1)^{\frac{1}{m+1}} + N \quad (19)$$

Sustituyendo N despejada de la ec.(19), junto con X de la ec.(19) en la ec.(11), se tiene:

$$\Delta h = \frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S X^{m+1} + S_t S \left[X - 0.3406(m+1)^{\frac{1}{m+1}} \right] \quad (20)$$

Realizando operaciones algebraicas en la ecuación 20 y reordenado se llega a:

$$\begin{aligned} X^{m+1} = & - \left(\frac{S_t S}{\frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S} \right) X + \\ & + \left(\frac{0.3406 S_t S (m+1)^{\frac{1}{m+1}}}{\frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S} \right) + \\ & + \frac{\Delta h}{\frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S} \end{aligned} \quad (21)$$

La ec.(21) es similar en su estructura a la forma reducida de una ecuación cúbica ($X^3 = AX + B$). Para poder resolverla como tal, se realizaron simulaciones entre resultados obtenidos por técnicas numéricas versus resultados obtenidos con ecuación cúbica reducida aplicados

a problemas de este tipo. De esto resultó una ligera modificación a la estimación de los parámetros A y B como se indica a continuación

$$A = - \left(\frac{S_t S}{\frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S} \right) \left(\frac{2}{m^{m-1}} \right) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} B = & \left(\frac{0.3406 S_t S (m+1)^{\frac{1}{m+1}}}{\frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S} \right) \left(\frac{2}{m^{m-1}} \right) + \\ & + \frac{\Delta h}{\frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S} \end{aligned} \quad (23)$$

Nótese que la modificación hecha a A y B es igual a 1 cuando el valor de m es igual a 2.

La solución de una ecuación cúbica reducida, es de la siguiente forma.

Se calcula el discriminante Δ

$$\Delta = \left(\frac{B}{2} \right)^2 - \left(\frac{A}{3} \right)^3 \quad (24)$$

Si $\Delta > 0$, la solución de la ec.(21) presenta dos raíces complejas y una real

$$X_1 = \sqrt[3]{\frac{B}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{B}{2} - \sqrt{\Delta}} \quad (25)$$

Si $\Delta < 0$, la ec.(21) proveería tres raíces (positivas y/o negativas) reales distintas

$$\cos \theta = \frac{\frac{B}{2}}{\sqrt{\left(\frac{A}{3}\right)^3}} \quad (26)$$

$$X_j = 2 \sqrt{\frac{A}{3}} \cos \left(\frac{\theta + 2j\pi}{3} \right) \quad (27)$$

donde $j = 0, 1, 2$ con $0 < \theta < \pi$. Adoptándose la raíz X_1 como la positiva mayor, siempre y cuando respete la variación admisible de carga de presión Δh .

Con X_1 de la ec.(25) o (27), se calcula el valor de X de la ec.(21), mediante:

$$X = {}^{m+1}\sqrt{(X_1)^3} \quad (28)$$

Con el valor de X de la ec.(28) y con la ec.(19), se determina el valor del N .

Así para determinar N' , en sustitución de la ec.(13), y considerando que la pérdida de carga por fricción es independiente de la posición de la tubería (lo que lleva a que en la ec.(21) los

términos que incluyan a la pendiente S_t no se consideren) se tendría:

$$X' = \left[\frac{h_d}{\frac{1}{m+1} K q^m \left(\frac{1}{D^m} - \frac{1}{D^n} \right) S} \right]^{\frac{1}{m+1}} \quad (29)$$

y aplicando la ec.(19), el valor para N' resulta:

$$N' = X' 0.3406(m+1)^{\frac{1}{m+1}} \quad (30)$$

Para conocer el comportamiento de la variación de la carga de presión en toda la longitud de la tubería, a partir de la ec.(11), se define la siguiente función:

$$h(N) = h_u + \frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} S \left[0.3406(m+1)^{\frac{1}{m+1}} + N \right]^{m+1} + S_t S N \quad (31)$$

donde h_u es la carga de presión en la última salida, que para tuberías con salidas múltiples convencionales adaptando la expresión de Scaloppi y Allen (1993), es:

$$h_u = h_n - \left(1 - \frac{m+1}{m+2} \right) h_{fL} + \frac{\Delta Z}{2} \quad (32)$$

donde ΔZ es positivo en pendientes descendentes y negativo en pendientes ascendentes.

En una la tubería con salidas múltiples telescópica, adaptando la expresión de Keller y Bliesner (1990), h_u se calcula con:

$$h_u = h_n - \left(1 - \frac{5}{8} \right) h_{fL} + \frac{\Delta Z}{2} \quad (33)$$

APLICACIONES

Primera aplicación

Determinar la longitud de una tubería lateral de aluminio empleada en riego por aspersión utilizando la siguiente información: diámetro interior de la tubería de aluminio D de 101 mm, separación entre aspersores S de 12 m, caudal nominal del aspersor q_n de 0.5 l/s y carga de presión nominal del aspersor h_n de 35 m. Se propondrán distintos valores a la pendiente S_t donde se encuentra colocada la tubería y se resolverá asumiendo por un lado distribución continua de caudal en toda la longitud de la tubería y, por otro, distribución discreta de caudal con descarga constante en cada salida.

La fórmula de Hazen-Williams para cuantificar la pérdida de carga por fricción en una tubería

simple según la ec.(1), esta dada por:

$$hf = K \frac{Q^m}{D^n} L 10.629 \left(\frac{1}{C_{HW}} \right)^{1.852} \frac{Q^{1.852}}{D^{4.871}} L \quad (34)$$

donde hf resulta en m , C_{HW} es un coeficiente que depende de la rugosidad de la tubería (que en este caso se establece en un valor de 130), Q se introduce en m^3/s , D y L en m . Así, entonces, el valor del exponente del caudal Q es $m = 1.852$, el del exponente del diámetro D es $n = 4.871$ y la constante $K = 0.0012926$.

La variación admisible de carga de presión Δh a lo largo de la tubería se establecerá como el 20% de la presión nominal del aspersor h_n , así Δh será de 7.0 m.

Solución considerando distribución continua de caudal en toda la longitud de la tubería

A partir de la información anterior, la ec.(4), adquiere la forma:

$$L = \left[\frac{\Delta h \pm S_t L}{\frac{1}{m+1} K \frac{q^m}{D^n} \frac{1}{S^m}} \right]^{\frac{1}{m+1}} = \left(\frac{\Delta h \pm S_t L}{2.47807 * 10^{-7}} \right)^{\frac{1}{2.852}} \quad (35)$$

El desnivel geométrico con igual valor a la pérdida de carga por fricción en la tubería, cuando la tubería está colocada en pendiente descendente, según la ec.(14) es:

$$\Delta Z = S_t L = \frac{\Delta h}{\left[\frac{m}{(m+1)^{\frac{m+1}{m}}} \right]} = \frac{7.0}{\left[\frac{1.852}{(2.852)^{\frac{2.852}{1.852}}} \right]} = 18.983m \quad (36)$$

Este valor al ser sustituido como numerador en la ec.(35) produce una longitud máxima de tubería de 581.385 m. La pendiente S_t resultante de relacionar estas dos cantidades (18.983/581.385) es 3.2651 %.

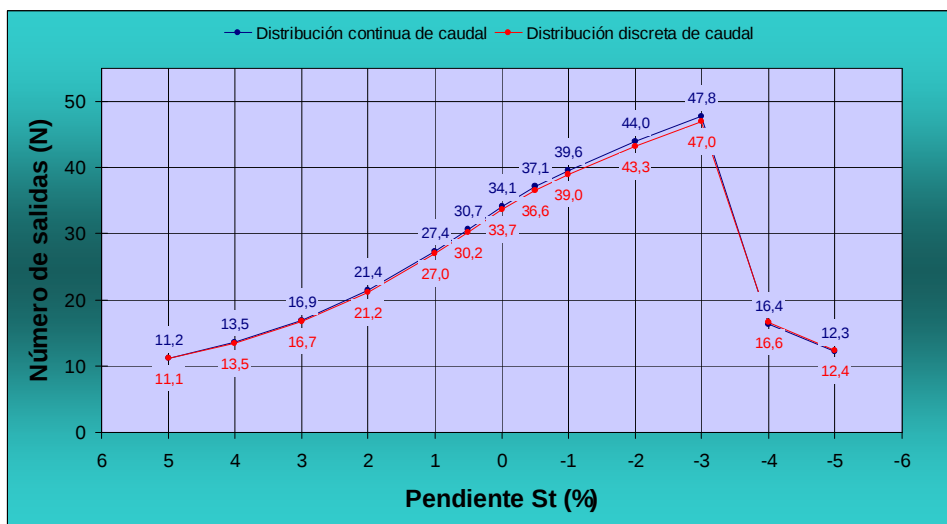
Solución considerando distribución discreta de caudal y caudal constante en las salidas

En el caso de la ec.(11), consigue la forma:

$$\Delta h = 2.9644 * 10^{-4} (0.49185)^{2.852} + S_t (12) N \quad (37)$$

En el caso de pendientes descendentes, la ec.(37) (según la ec.(18)) es:

$$\Delta h_m = 2.9644 * 10^{-4} (0.49185 + N)^{2.852} - S_t (12) N \quad (38)$$



Gráfica 3. Número de salidas N según la pendiente sobre la que se coloca la tubería

Determinando el valor de Δh_m empleando las ecuaciones 15, 16 y 17; así como la consideración de que si $f(N_{mx})$ adquiere valores absolutos superiores a Δh , a Δh_m se le asigna el valor $-\Delta h$.

La solución numérica aplicando el método de aproximaciones sucesivas, de las ecs.(37) y (38) sería:

a) Para pendientes ascendentes

$$N = \frac{\Delta h - 2.9644 * 10^{-4}(0.49185 + N)^{2.852}}{S_t(12)} \quad (39)$$

b) Para pendientes descendentes

$$N = \frac{2.9644 * 10^{-4}(0.49185 + N)^{2.852} - \Delta h_m}{S_t(12)} \quad (40)$$

La selección del método de aproximaciones sucesivas, de entre los muchos que hay para resolver ecuaciones no lineales (bisección, secante, Newton-Rhapson, ...), se debió a que la función auxiliar $x = g(x)$ se puede elegir de tal manera que se garantice la convergencia a la solución buscada. La condición de convergencia es $|g'(x_0)| < 1,0$, donde x_0 es el primer valor inicial supuesto; condición que cumple la derivada de las ecuaciones 39 y 40 para valores iniciales de N pequeños (por ejemplo $N = 2$), en un amplio rango de valores propuestos de pendientes S_t .

En la Gráfica 3 se presenta la solución encontrada (por aproximaciones sucesivas) al número de segmentos de tubería de aluminio de 12 m, que para este caso se corresponde con el número de salidas (N), para los distintos valores de S_t

propuestas; considerando distribución continua (sin el 0.49185 en las ecs.(39) y (40) y discreta de caudal.

En la Gráfica 3 se observa que los valores de N aumentan a medida que la pendiente ascendente disminuye; mientras que los valores de N crecen según se incrementa la pendiente descendente hasta alcanzar un valor máximo, después del cual, N decrece sorprendentemente dado que el valor absoluto de $f(N_{mx})$ superó a Δh , haciendo a Δh_m negativa. Además, es de particular interés notar que la solución a los valores de N considerando una distribución continua de caudal son sobreestimados respecto a los que se obtienen considerando una distribución discreta de caudal para cada valor de pendiente S_t propuesta, en tanto esta se ubique en la parte creciente de la gráfica.

Los resultados de N que se obtienen de aplicar la solución analítica, para los mismos valores de pendiente S_t utilizados en la solución numérica, se presentan en la Tabla 1.

A efecto de explorar un poco más el comportamiento de la solución analítica propuesta, respecto de los resultados proporcionados por el método numérico de aproximaciones sucesivas, se determinaron los valores de N (manteniendo el resto de la información similar a la especificada al inicio de esta aplicación) en diámetros de tubería de aluminio de 76 mm y 51 mm, los resultados se muestran en la Tabla 2. Se nota que en todos los casos los valores de N obtenidos con la distribución continua de caudal sobreestiman a los que se alcanzan en la distribución discreta de caudal. Además, los resultados para N de la solución analítica, permiten adoptar el mismo

S_t (%)	Δh^1	A	B	Δ	X_1	X	N
5	7	-2394.5	24790.9	662107497.8	9.94	11.20	10.71
4	7	-1915.6	24555.3	411072885.3	11.93	13.57	13.08
3	7	-1436.7	24319.8	257690466.1	14.71	16.91	16.42
2	7	-957.8	24084.2	177554126.7	18.52	21.55	21.05
1	7	-478.9	23848.7	146257754.2	23.32	27.46	26.97
0.5	7	-239.4	23730.9	141297645.1	25.97	30.75	30.26
0	7	0.0	23613.2	139395235.2	28.69	34.15	33.66

S_t (%)	N_{mx}	$f(N_{mx})$	Δh_m						
-0.5	9.50	-0.36	6.64	239.4	22282.0	123613435.9	30.97	37.01	36.51
-1	14.03	-1.07	5.93	478.9	19759.4	93540774.2	32.87	39.40	38.90
-2	20.62	-3.17	3.83	957.8	12439.9	6146353.5	36.09	43.47	42.98
-3	25.79	-5.97	1.03	1436.7	2778.0	-107898194.2	38.84	46.96	46.47
-4	30.21	-9.33	-7	1915.6	-24555.3	-109590862.8	14.37	16.50	16.01
-5	34.14	-13.20	-7	2394.5	-24790.9	-354813885.2	10.89	12.33	11.84

¹ Al no cambiar Δh por Δh_m en la solución analítica y en ec.(40), las N serían mayores y siempre crecientes

Tabla 1. Solución analítica para los valores de N según valores de S_t

Diámetro de 76 mm				Diámetro de 51 mm			
S_t (%)	Continua	Discreta	Analítica	S_t (%)	Continua	Discreta	Analítica
5	10.19	10.04	9.71	5	7.44	7.14	6.97
4	11.78	11.58	11.30	4	8.03	7.68	7.55
3	13.70	13.43	13.23	3	8.65	8.26	8.16
2	15.93	15.58	15.46	2	9.29	8.87	8.80
1	18.40	17.97	17.92	1	9.95	9.50	9.46
0.5	19.69	19.23	19.21	0.5	10.29	9.82	9.80
0	21.01	20.52	20.52	0	10.63	10.14	10.14
-0.5	22.19	21.67	21.68	-2	11.79	11.24	11.29
-1	23.22	22.67	22.69	-4	12.76	12.15	12.26
-2	25.06	24.46	24.49	-6	13.62	12.97	13.12
-3	26.71	26.06	26.09	-8	14.42	13.72	13.91
-5	29.65	28.91	28.88	-10	15.17	14.43	14.64

Tabla 2. Solución al valor de N para diámetros de 76 mm y 51 mm según valores de S_t

valor entero de N (para adaptarse a condiciones prácticas) que la distribución discreta de caudal resuelta con método numérico, excepto quizás para valores de pendiente S_t muy grandes.

Para analizar el comportamiento de la carga de presión en cada aspersor, bajo el supuesto de una distribución continua de caudal, una distribución discreta de caudal con caudal constante en cada salida y una distribución discreta de caudal con caudal variable en cada salida; se elaboraron las curvas de relación de carga de presión h/h_n de tres casos representativos.

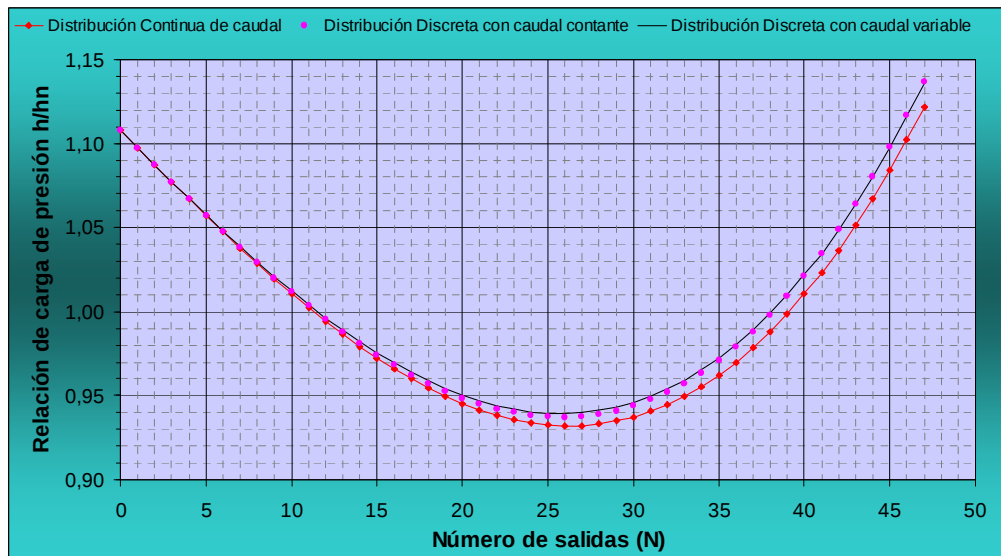
La ecuación que relaciona la carga presión y el caudal, empleando los valores de caudal y carga de presión especificados para este caso y asumiendo que en la boquilla del aspersor se presenta flujo completamente turbulento, es:

$$q_n = 0.0845 h_n^{0.5} \quad (41)$$

Con la ec.(41) se calculo el caudal q en cada salida en función de la carga de presión h que se

presente en esta, con lo cual es posible calcular paso a paso de aguas abajo hacia aguas arriba, la pérdida de carga por fricción h_s en cada segmento de tubería. Los resultados de h (al igual que los de las ecs.(42) a (47) para cada uno de los 3 casos estudiados, al ser divididos por la carga de presión nominal h_n , aportaron los valores de la relación de carga de presión h/h_n que se muestran en las Gráficas 4, 5 y 6. El valor de h_u que se empleo en cada uno de los tres casos, a efecto de tener un mismo valor de partida, fue el del cómputo a caudal variable en las salidas, lo que hizo innecesario el uso de la ec.(32) para determinar h_u de las ecs.(42) a 47.

Caso 1. Diámetro D de 101 mm en pendiente descendente S_t de 3.0 %, se adopto como solución práctica N igual a 47, los modelos $h(N)$ para determinar la carga de presión h a distribución continua de caudal y distribución discreta



Gráfica 4. Relación de carga de presión D 101 mm, S_t -3.0 %, h_u 38.7683 m

(Gráfica 4), son respectivamente

$$h(N) = 30.7683 + 2.9644 * 10^{-4} (N)^{2.852} - 0.03(12)N \quad (42)$$

$$h(N) = 30.7683 + 2.9644 * 10^{-4} (0.49185 + N)^{2.852} - 0.03(12)N \quad (43)$$

En la Gráfica 4 la variabilidad de la carga de presión observada respecto a la presión nominal del aspersor, expresada en porcentaje ($h/h_n * 100$), es: 18.95 % para la distribución continua de caudal, 19.94 % para la distribución discreta con caudal constante en cada salida y de 19.66 % en la distribución discreta con caudal variable en cada salida. Con un número de salidas N igual a 48, la variación en la relación de cargas de presión expresada en porcentaje, se modifica a: 21.00 % para la distribución continua de caudal, 22.05 % para la distribución discreta con caudal constante en cada salida y de 21.78 % en la distribución discreta con caudal variable en cada salida. El incremento observado en las 3 opciones en los porcentajes de variación al pasar de 47 a 48 salidas es del orden del 2.1 %; en tanto que, la diferencia en porcentaje entre las distribuciones discretas a caudal constante y variable solo es del orden del 0.30 %.

Caso 2. Diámetro D de 76 mm colocada horizontalmente, se adopto como solución práctica N igual a 21, los modelos $h(N)$ para determinar la carga de presión h a distribución continua de caudal y distribución discreta (Gráfica 5), son

respectivamente

$$h(N) = 33.29 + 1.184542 * 10^{-3} (N)^{2.852} - 0.03(12)N \quad (44)$$

$$h(N) = 33.29 + 1.184542 * 10^{-3} (0.49185 + N)^{2.852} \quad (45)$$

En la Gráfica 5 la carga de presión observada varia respecto a la presión nominal del aspersor, enunciada en porcentaje ($h/h_n * 100$), de la siguiente forma: 19.97 % para la distribución continua de caudal, 21.34 % para la distribución discreta con caudal constante en cada salida y de 20.90 % en la distribución discreta con caudal variable en cada salida. Cuando se considera un número de salidas N igual a 20, la variación en la relación de cargas de presión, expresada en porcentaje, se modifica a: 17.38 % para la distribución continua de caudal, 18.63 % para la distribución discreta con caudal constante y de 18.18 % en la distribución discreta con caudal variable. El decremento observado en las 3 opciones en los porcentajes de variación al pasar de 21 a 20 salidas es del orden del 2.7 %, por otro lado, la diferencia en porcentaje entre las distribuciones discretas a caudal constante y variable es de tan solo el 0.45 %.

Caso 3. Diámetro D de 51 mm en pendiente ascendente S_t de 5 %, se adopto como solución práctica N igual a 7, los modelos $h(N)$ para determinar la carga de presión h a distribución continua de caudal y distribución discreta (Gráfica

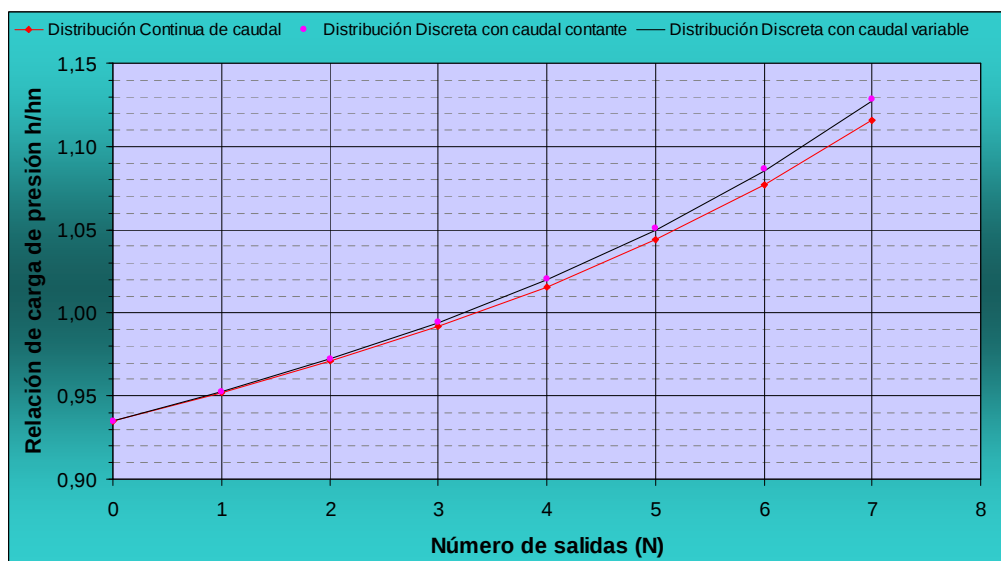
6), son respectivamente

$$h(N) = 32.72 + 8.26836 * 10^{-3} (N)^{2.852} + 0.05(12)N \quad (46)$$

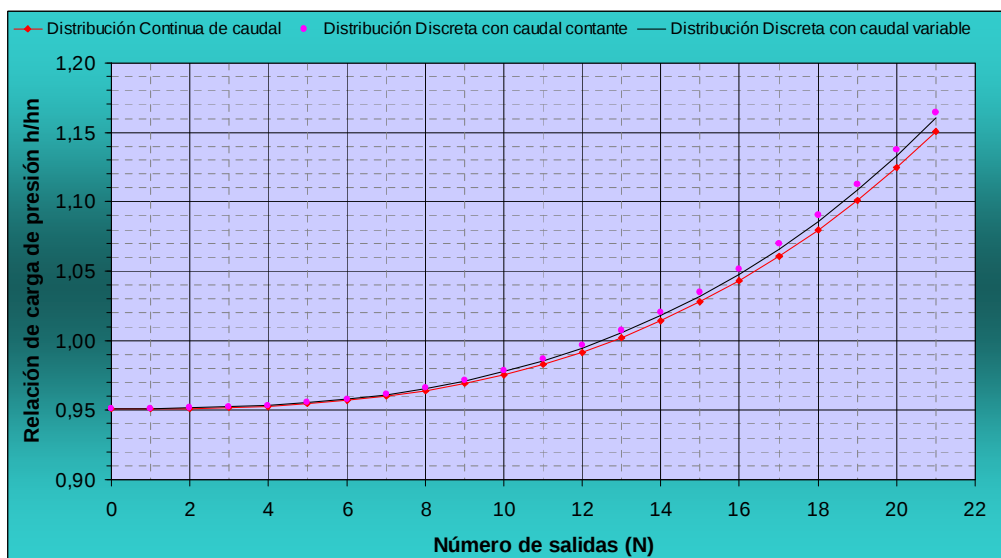
$$h(N) = 32.72 + 8.26836 * 10^{-3} (0.49185 + N)^{2.852} + 0.05(12)N \quad (47)$$

En la Gráfica 6 la carga de presión observada varía respecto a la presión nominal del aspersor, explicada en porcentaje ($h/h_n 100$), de la siguiente forma: 18.08 % para la distribución continua de caudal, 19.37 % para la distribución discreta con caudal constante en cada salida y

de 19.24 % en la distribución discreta con caudal variable en cada salida. Con un número de salidas N igual a 8, la variación en la relación de cargas de presión expresada en porcentaje, se modifica a: 22.61 % para la distribución continua de caudal, 24.26 % para la distribución discreta con caudal constante en cada salida y de 24.17 % en la distribución discreta con caudal variable en cada salida. El incremento observado en las 3 opciones en los porcentajes de variación al pasar de 7 a 8 salidas es del orden del 4.8 %; mientras que, la diferencia en porcentaje entre las distribuciones discretas a caudal constante y variable es de tan solo el 0.10 %.



Gráfica 5. Relación de carga de presión D 76 mm, S_t 0.0 %, h_u 33.29 m



Gráfica 6. Relación de carga de presión D 51 mm, S_t 5.0 %, h_u 32.72 m

Segunda aplicación

Con la finalidad de poder contrastar los resultados de las ecuaciones propuestas en esta investigación aplicadas a las tuberías telescópicas, con las desarrolladas por otros investigadores, se resuelve la aplicación presentada por Valiantzas (2002b).

Determinar los diámetros que constituyen a una tubería con salidas múltiples telescópica con 32 salidas espaciadas a cada 12 m, con un caudal y carga de presión nominal en las salidas de 0.5 l/s y 35 m, respectivamente. La tubería está en una pendiente descendente de 2 % y el coeficiente de fricción de Hazen-Williams es de 130. La variación admisible en la carga de presión Δh a lo largo de toda la tubería deberá ser del 20 % de la presión nominal (que para este ejemplo es de 7.0 m). Además, como la longitud total de la tubería es de 384 m, el desnivel topográfico entre el inicio y final de la tubería es de 7.68 m, lo que implica que la máxima pérdida de carga de presión H puede ser de hasta 14.68 m, por lo tanto, despejando el diámetro D de la ecuación 11, se obtiene un diámetro teórico D_t igual a 84.26 mm.

La aplicación de la ec.(10), en diámetros comerciales de 101 mm y 76 mm provee 6.07 m y 24.27 m respectivamente, de pérdida de carga por fricción h_{f_L} en la tubería con salidas múltiples considerando que se tiene diámetro único en toda su longitud. Así, una combinación de ambos diámetros es sugerida para perder 14.68 m de carga disponible.

La solución según Denículi et al. (1992), con el supuesto de una distribución continua y uniforme de caudal, requiere de un diámetro teórico D_t que se despeja de la ec.(1) considerando que se puede perder 14.68 m de carga disponible

$$D_t = \left[0.0012926 \frac{0.016^{1.852}}{14.68} 384 \left(\frac{1}{2.852} \right) \right]^{\frac{1}{4.871}} = 0.0835m$$

Entonces de la ec.(5), la longitud del tramo de menor diámetro de aguas abajo es:

$$L' = \left[\frac{\left(\frac{101}{83.5} \right)^{4.871} - 1}{\left(\frac{101}{76} \right)^{4.871} - 1} \right]^{\frac{1}{2.852}} 384 = 303.149m$$

Por tanto, el número N de salidas del tramo de aguas abajo será de 25.26, el cual se redondea al número entero más próximo por defecto, en este caso N' igual a 25.

La solución según Montalvo (2007), ec.(6), para una distribución discreta de caudal con caudal constante en cada salida, con r y K_a igual a 1, F_T para 32 salidas de 0.366, proporciona:

$$F'N'^{m+1} = \frac{14.68 - 0.00129 \frac{(0.0005)^{1.852}}{(0.101)^{4.871}} 12}{\left(\frac{1}{(0.076)^{4.871}} - \frac{1}{(0.101)^{4.871}} \right)} \frac{(1 + 32 * 0.366 - 1) 32^{1.852}}{0.001299(0.0005)^{1.852} 12} = 3398.922$$

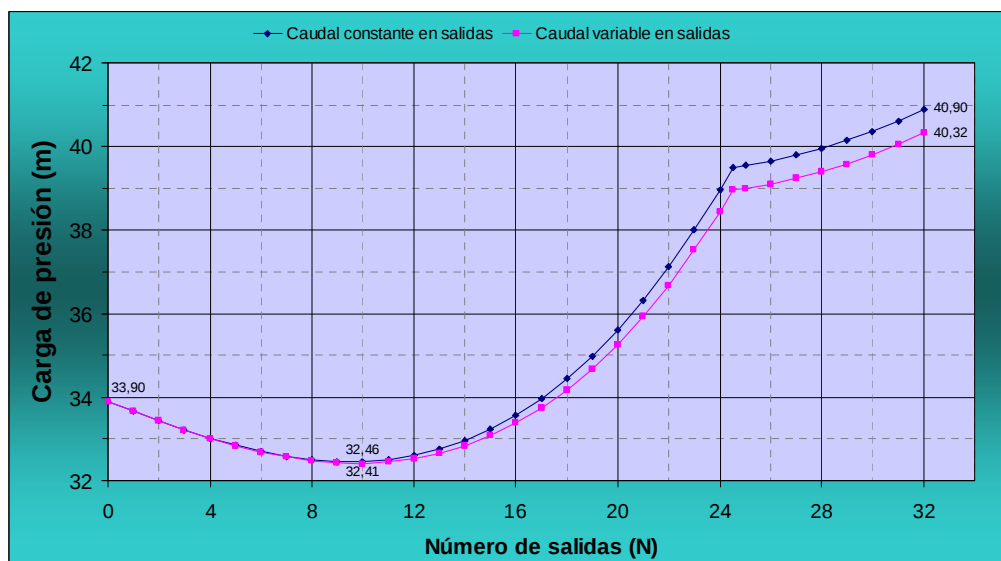
Luego el valor de $\log(F'N'^{m+1})$ es de 3.531. De tablas para N' de 24 el valor de $\log(F'N'^{m+1})$ es de 3.507 y para N' de 25 $\log(F'N'^{m+1})$ es de 3.556; por ello se asumen 24 salidas a cada 12 m.

La solución propuesta en esta investigación, para una distribución discreta de caudal con caudal constante en cada salida, sería según la ec.(13)

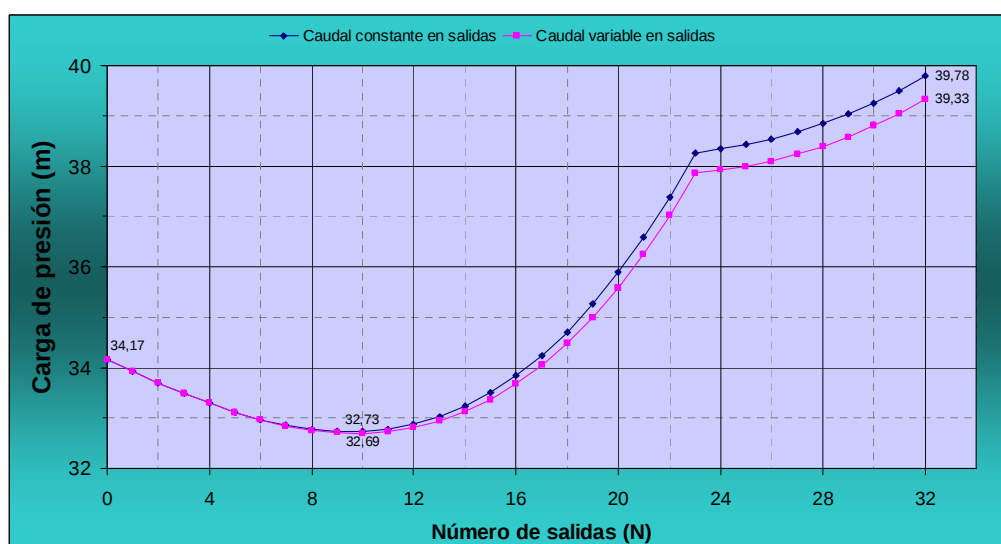
$$N' = \left[\frac{14.68 - 6.07}{\frac{0.0012926}{2.852} 0.0005^{1.852} \left(\frac{1}{(0.076)^{4.871}} - \frac{1}{(0.101)^{4.871}} \right)} 12 \right]^{\frac{1}{2.852}} - 0.3406(2.852)^{\frac{1}{2.852}} = 24.5$$

Se adoptan 24 salidas en el tramo de aguas abajo como valor de N' , este valor se corresponde con el resultado que se obtienen de aplicar la ecs.(29) y (30). Además, se resalta que la solución N' igual a 24 es el resultado al que se llega en Valiantzas (2002b), aplicando un procedimiento mucho más laborioso.

Si se adoptase la solución de N igual a 24.5 (factible de llevarse en la práctica haciendo la reducción de diámetro a los 6.0 m) y aplicando la ecuación 10, la pérdida de carga por fricción en el tramo de aguas abajo en la tubería de diámetro de 76 mm es de 11.48 m, y de 2.87 m en la tubería de diámetro de 101 mm. Por lo tanto, la pérdida de carga por fricción en el tramo de aguas arriba con N igual a 7.5 sería de 6.07 m menos 2.87 m igual a 3.20 m; que sumados a los 11.48 m del tramo de aguas abajo da un total de pérdida en la tubería telescópica de 14.68 m. Sin embargo, a pesar de que numéricamente los resultados son correctos, no se tiene la certeza de que se este respetando la variación admisible de carga de presión establecida, lo que hace necesario un análisis de la variación de la carga de presión en la tubería telescópica (Gráfica 7).



Gráfica 7. Variación de carga de presión en tubería telescópica para Δh



Gráfica 8. Variación de carga de presión en tubería telescópica para Δh_m

Se observa en la Gráfica 7 que efectivamente la diferencia en cargas de presión entre el inicio y final de la tubería es de 7.0 m; sin embargo, la máxima diferencia de presión que se presenta en toda la longitud de la tubería es de 8.4 m. Entonces, bajo esta solución la variación en cargas de presión en la tubería es de 24.10 % cuando se supone caudal constante en cada salida y de 22.60 % en el caso de caudal variable en cada salida. Esto obliga a disminuir la variación de cargas de presión, redefiniendo la variación admisible de carga de presión Δh a Δh_m en el

diámetro D' de 76 mm, por ser este donde se supera el límite de 7.0 m, que en este caso resulta Δh_m de 5.56 m. Así, la carga de presión disponible remanente h_d de la ecuación 13 pasa de 8.61 m a 7.17 m; con ello el número de salidas N' resulta de 22.95, valor que se redondea a 23 salidas; la variación de las cargas de presión para esta solución se muestra en la Gráfica 8.

En la Gráfica 8 se advierte que la diferencia en cargas de presión entre los extremos de la tubería es igual a Δh_m de 5.61 m y la máxima diferencia de cargas de presión a lo largo de to-

da la tubería es de Δh de 7.05 m. Con esto, la variación en carga de presión en la tubería es de 20.14 % cuando se supone caudal constante en cada salida y de 18.97 % en el caso de caudal variable en cada salida; con estos resultados, se da como aceptable esta solución. Habría que notar también, que la diferencia entre los porcentajes de variación a caudal constante y variable (1.17 % en este caso), se redujo en relación a la opción inicial de N' igual a 24.5 que ascendía a 1.51 %.

Las funciones $h(N)$ usadas para el esbozo de la variación de la carga de presión en toda la longitud de la tubería, en la solución definitiva (Gráfica 8), fueron:

- a) Para el tramo de aguas abajo, de la salida 1 a la 23, con diámetro de 76 mm

$$h(N) = 34.167 + 1.184542 * 10^{-3} (0,49185 + N)^{2.852} - 0.02(12)N \quad (48)$$

- b) b) En el tramo de aguas arriba con diámetro de 101 mm

$$h(N) = 34.167 + (hf_{L'_1} - hf_{L'_2}) + 2.9644 * 10^{-4} (0,49185 + N)^{2.852} - 0.05(12)N \quad (49)$$

donde $hf_{L'_1}$ igual a 9.63 m y $hf_{L'_2}$ igual a 2.41 m, son la pérdida de carga por fricción en el tramo de tubería de aguas abajo con un diámetro de 76 mm y 101 mm, respectivamente; resultando así una h_u para el diámetro D de 101 mm de 41.39 m. Esta función se aplica de la salida 24 a la 32.

Los valores mínimos de cada función $h(N)$ son: 32.73 m en el diámetro D' de 76 mm, que se presenta en la salida 9.5; 38.22 m en el diámetro D de 101 mm, ubicado en la salida 20.62 (no aplica). Así, el mínimo minimorum que rebasa el límite de Δh igual a 7.0 m es el de la salida 10 (que coincide con la ubicación del mínimo en la Tabla 3).

Número Segmento	S (m)	D (mm)	Q (l/s)	Q (l/s)	hf_s (m)	ΔZ (m)	H (m)
						$h_u =$	34.167
1	12	76	0,494	0,494	0,003	-0.24	33,930
2	12	76	0,492	0,986	0,012	-0.24	33,702
3	12	76	0,491	1,477	0,025	-0.24	33,487
4	12	76	0,489	1,966	0,043	-0.24	33,290
5	12	76	0,488	2,453	0,064	-0.24	33,114
6	12	76	0,486	2,939	0,090	-0.24	32,964
7	12	76	0,485	3,425	0,119	-0.24	32,843
8	12	76	0,484	3,909	0,152	-0.24	32,756
9	12	76	0,484	4,392	0,189	-0.24	32,705
10	12	76	0,483	4,876	0,229	-0.24	32,694
11	12	76	0,483	5,359	0,273	-0.24	32,727
12	12	76	0,483	5,842	0,321	-0.24	32,808
13	12	76	0,484	6,326	0,371	-0.24	32,939
14	12	76	0,485	6,811	0,426	-0.24	33,125
15	12	76	0,486	7,298	0,484	-0.24	33,369
16	12	76	0,488	7,786	0,546	-0.24	33,675
17	12	76	0,490	8,276	0,611	-0.24	34,046
18	12	76	0,493	8,769	0,680	-0.24	34,486
19	12	76	0,496	9,265	0,753	-0.24	34,999
20	12	76	0,500	9,765	0,830	-0.24	35,589
21	12	76	0,504	10,269	0,911	-0.24	36,260
22	12	76	0,509	10,778	0,997	-0.24	37,016
23	12	76	0,514	11,292	1,086	-0.24	37,863
24	12	101	0,520	11,812	0,296	-0.24	37,918
25	12	101	0,520	12,333	0,320	-0.24	37,998
26	12	101	0,521	12,853	0,346	-0.24	38,104
27	12	101	0,522	13,375	0,372	-0.24	38,236
28	12	101	0,523	13,898	0,399	-0.24	38,395
29	12	101	0,524	14,421	0,428	-0.24	38,583
30	12	101	0,525	14,946	0,457	-0.24	38,800
31	12	101	0,526	15,472	0,487	-0.24	39,047
32	12	101	0,528	16,000	0,518	-0.24	39,325
Suma					12.84	Promedio	35.051

Tabla 3. Carga de presión en tubería telescópica 101 y 76 mm, S_i -2.0%, h_u 34.167 m

Para contrastar los resultados obtenidos del dimensionamiento en esta investigación con el procedimiento clásico por tanteos, se procede a realizar este último:

- Se establecen, por ejemplo, los valores $N = 9$, $N' = 23$, $N_T = 32$, $L = 108$ m, $L' = 276$ m, $L_T = 384$ m, $Q = 4,5$ l/s, $Q' = 11,5$ l/s, $Q_T = 16$ l/s, $D = 101$ mm y $D' = 76$ mm.
- Se determina el factor de salidas múltiples, utilizando la ec.(7) dividida sumando a sumando entre el número de salidas correspondiente, para: N_T que resulta en un F_T de 0.366; N' dando un F' de 0.373.
- Se determina, con la ec.(34) multiplicada por el factor de salidas múltiples correspondiente, la pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples convencional: F_T , L_T , Q_T y D que resulta en 6.07 m; F' , L' , Q' y D cuyo resultado es 2.41 m; F' , L' , Q' y D' resultado 9.64 m.
- Así la pérdida de carga en la tubería con salidas múltiples telescópica sería 6.07 m menos 2.41 m mas 9.64 m igual a 13.3 m; valor que es similar a la máxima pérdida de carga $H = \Delta Z + \Delta h_m = 7.68 + 5.56 = 13.24$ m definida en este trabajo.

CONCLUSIONES

El ajuste de un modelo potencial mediante regresión no lineal a la sumatoria $\sum_{i=1}^N i^m$ de la fórmula para calcular la pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples convencional (ec.(2)), posibilita determinar la longitud de este tipo de tuberías bajo cualquier condición de pendiente.

La función $f(N)$ permite redefinir el valor de la variación admisible de carga de presión Δh_m entre los extremos de una tubería con salidas múltiples convencional colocada en pendiente descendente, de tal manera que la variación de carga presión derivada de la combinación de la máxima pérdida de carga y la pendiente a lo largo de toda la tubería, no supere el límite de variación admisible de carga de presión Δh establecido originalmente.

La solución analítica propuesta, consistente en resolver una ecuación cúbica en su forma reducida, para determinar la longitud de la tubería con salidas múltiples convencional, representa una excelente aproximación en la mayoría de los casos.

La ecuación analítica simple establecida para determinar la longitud del tramo de aguas abajo en una tubería con salidas múltiples telescópica, suministra resultados tan precisos como las que han generado otros investigadores con estructura más compleja.

Las funciones $h(N)$ permiten esbozar la variación de la carga de presión en toda la longitud de la tubería con salidas múltiples tanto convencionales como telescópicas, a efecto de apreciar la viabilidad de la solución alcanzada.

Los resultados de longitud en las tuberías con salidas múltiples, tanto convencionales como telescópicas, alcanzan valores de mayor magnitud considerando una distribución continua de caudal que considerando una distribución discreta de caudal.

En la distribución discreta con caudal constante en las salidas, la diferencia en los porcentajes de variación de la relación de carga de presión ($h/h_n \cdot 100$), al incrementar o disminuir una sola salida en la longitud total de la tubería con salidas múltiples convencional, es mucho mayor que la diferencia en porcentaje de variación de la relación de carga de presión ($h/h_n \cdot 100$) entre la distribución discreta a caudal constante y caudal variable para un mismo número de salidas; lo que implica que la solución final que se alcance no será diferente, independientemente de que se considere en cada salida caudal constante o caudal variable.

LISTA DE SÍMBOLOS

- A = coeficiente de la ecuación cúbica;
 B = término constante en la ecuación cúbica;
 C_{HW} = coeficiente de fricción para la fórmula de Hazen-Williams;
 D = diámetro interno de la tubería simple sin salidas, de la tubería con salidas múltiples convencional o en el tramo de aguas arriba de la tubería con salidas múltiples telescópica;
 D' = diámetro interno en el tramo de aguas abajo en una tubería con salidas múltiples telescópica;
 D_t = diámetro teórico en una tubería con salidas múltiples convencional;
 F_a = factor de corrección ajustado para una tubería con salidas múltiples convencional considerando distribución discreta de caudal;
 F_c = factor de corrección para una tubería con salidas múltiples convencional considerando distribución continua de caudal;

- F_d = factor de corrección para una tubería con salidas múltiples convencional considerando distribución discreta de caudal;
- F_T = factor de corrección por salidas múltiples empleando N_T , según Christiansen;
- F' = factor de corrección por salidas múltiples empleando N' , según Christiansen;
- $f(N)$ = función que describe el comportamiento de la pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples convencional y el desnivel topográfico donde se ubica;
- $f(N_{mx})$ = valor extremo de la función $f(N)$ en el punto N_{mx} ;
- $g(x)$ = función empleada en la solución numérica del método de aproximaciones sucesivas;
- $g'(x_0)$ = valor de la derivada de la función $g(x)$ en x igual al primer valor supuesto x_0 ;
- h = carga de presión de operación en las salidas de la tubería con salidas múltiples;
- H = máxima pérdida de carga de presión entre inicio y final de la tubería, igual a $\Delta h \pm \Delta h$;
- $h(N)$ = función que describe el comportamiento de la carga de presión en la tubería con salidas múltiples;
- h_d = carga de presión disponible remanente;
- h_f = pérdida de carga por fricción en una tubería simple o sin distribución de caudal;
- hf_i = pérdida de carga por fricción en cada segmento de la tubería con salidas múltiples;
- hf_L = pérdida de carga por fricción en una tubería con salidas múltiples convencional;
- $hf_{L'1}$ = pérdida de carga por fricción en el tramo de aguas abajo en una tubería con salidas múltiples telescópica para el diámetro comercial menor D' ;
- $hf_{L'2}$ = pérdida de carga por fricción en el tramo de aguas abajo en una tubería con salidas múltiples telescópica para el diámetro comercial mayor D ;
- h_n = carga de presión nominal o media en las salidas de la tubería con salidas múltiples;
- h_s = pérdida de carga por fricción en un segmento de la tubería con salidas múltiples;
- h_u = carga de presión en la última salida;
- i = entero 1, 2, 3, ...; que representa las salidas en la tubería con salidas múltiples desde aguas abajo hacia aguas arriba;
- j = entero 0, 1 ó 2 para generar las raíces de la ecuación cúbica;
- K = coeficiente, acorde con la fórmula para determinar h_f y el factor de conversión de unidades;
- K_a = coeficiente mayorante para introducir el efecto de las pérdidas de carga localizadas;
- L = longitud de la tubería simple sin salidas, tubería con salidas múltiples convencional o del tramo de aguas arriba en una tubería con salidas múltiples telescópica;
- L' = longitud del tramo de aguas abajo en una tubería con salidas múltiples telescópica;
- L_T = longitud total en una tubería con salidas múltiples telescópica, suma de L y L' ;
- m = exponente del caudal en la fórmula de pérdida de carga por fricción empleada;
- N = número de salidas en la tubería con salidas múltiples convencional o en el tramo de aguas arriba en la tubería con salidas múltiples telescópica;
- N' = número de salidas en el tramo de aguas abajo de la tubería con salidas múltiples telescópica;
- N_{mx} = valor de N donde se presenta un valor extremo de $f(N)$;
- N_T = número total de salidas de la tubería con salidas múltiples telescópica e igual a la suma de N y N' ;
- n = exponente del diámetro interno en la fórmula de pérdida de carga por fricción empleada;
- Q = caudal que circula por la tubería simple sin salidas, por la tubería con salidas múltiples convencional (que se va distribuyendo entre las salidas) o en el tramo de aguas arriba de una tubería con salidas múltiples telescópica;
- Q' = caudal que circula (que se va distribuyendo entre las salidas) en el tramo de aguas abajo de una tubería con salidas múltiples telescópica;
- Q_T = caudal total en una tubería con salidas múltiples telescópica, suma de Q y Q' ;
- q = caudal en cada una de las salidas;
- q_n = caudal nominal o medio en las salidas de la tubería con salidas múltiples;

- r = relación entre la longitud del inicio de la tubería a la primera salida y la separación constante entre las salidas consecutivas S ;
- r^2 = coeficiente de determinación;
- S = longitud de cada segmento de tubería entre dos salidas consecutivas;
- S_t = pendiente natural del terreno donde esta colocada la tubería;
- X = variable auxiliar para encontrar el valor de N empleando la solución de una ecuación cúbica reducida;
- X' = variable auxiliar para encontrar el valor de N' ;
- X_1 = solución de la ecuación cúbica reducida;
- X_j = soluciones de la ecuación cúbica reducida;
- x = variable utilizada para generar una función auxiliar en la solución numérica del método de aproximaciones sucesivas;
- x_0 = valor inicial supuesto en la solución numérica del método de aproximaciones sucesivas;
- θ = ángulo que se emplea para encontrar las raíces de la ecuación cúbica reducida;
- Δ = discriminante en la solución de la ecuación cúbica reducida;
- Δh = variación admisible de carga de presión en toda la longitud de la tubería;
- Δh_m = valor redefinido de Δh , que se da entre los extremos de una tuberías con salidas múltiples convencionales en pendientes descendentes;
- ΔZ = desnivel geométrico o topográfico entre los extremos de la tubería con salidas múltiples;

REFERENCIAS

- Ángeles, V., Arteaga, R., Vázquez, M.A., Carrillo, M. y Ibáñez, L.A., (2007). Factores de ajuste para la pérdida de carga por fricción en tuberías con salidas múltiples telescópicas o con servicio mixto. *Ingeniería del Agua*, 14(4), 293–305.
- Anwar, A.A., (1999). Factor G for pipelines with equally spaced multiple outlets and outflow. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 125(1), 34–39.
- Anwar, A.A., (2000). Inlet pressure for horizontal tapered laterals. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 126(1), 57–63.
- Denículi, W., Ramos, M.M. y Laureiro, B.T., (1992). Dimensionamento de tubulacoes dotadas de múltiplas saídas, utilizando o conceito de conductos equivalentes. *Ceres*, 39(225), 414–427.
- Detomini, E.R. y Frizzzone J., (2007). Adequacao de modelos hidráulicos aplicáveis ao dimensionamento de linhas laterais com emissores convencionais e autocompensantes. *Avances en ingeniería rural*. Cadir 2007, IX Congreso Argentino de Ingeniería Rural y I del MERCOSUR, 256–262.
- Hathoot, H.M., Abo-Ghobar, H.M., Al-Amoud, A.I. y Mohammad, F.S., (1994). Analysis and design of sprinkler irrigation laterals. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 120(3), 534–549.
- Kang, Y. y Nishiyama, S., (1996). Analysis and design of microirrigation laterals. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 122(2), 75–82.
- Keller, J. y Bliesner, R.D., (1990). *Sprinkle and trickle irrigation*. Van Nostrand Reinhold, New York.
- Montalvo, T., (2007). *Riego localizado. Diseño de instalaciones*. Ediciones V.J. Valencia, España.
- Ramos, M.M. y Denículi, W., (1992). Máximo comprimento das linhas laterais de irrigacao, usando o conceito de vazao ficticia: linhas em nivel. *Ceres*, 39(225), 428–434.
- Ravikumar, V., Ranganathan, C.R. y Santhana Bosu, S., (2003). Analytical equation for variation of discharge in drip irrigation laterals. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 129(4), 295–298.
- Scaloppi, E.J., y Allen, R.G., (1993). Hydraulics of irrigation laterals: Comparative analysis. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 119(1), 91–115.
- Tarjuelo, J.M., (2005). *El riego por aspersión y su tecnología*. 3a. Edición revisada y ampliada, Ediciones Mundi-Presa, Madrid, España.
- Valiantzas, J.D., (1998). Analytical approach for direct drip lateral hydraulic calculation. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 124(6), 300–305.
- Valiantzas, J.D., (2002a). Continuous outflow variation along irrigation laterals: effect of the number of outlets. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 128(1), 34–42.

Valiantzas, J.D., (2002b). Hydraulic Analysis and optimum design of multidiameter irrigation laterals. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 128(2), 78–86.

Wu, I.P. y Gitlin, H.M., (1974). Drip irrigation design based on uniformity. *Trans. ASAE*, 17(3), 429–432.