

PREDICCIÓN DE LA VELOCIDAD MEDIA DEL FLUJO EN RÍOS DE MONTAÑA

R. López Alonso, J. Barragán Fernández

Departamento de Ingeniería Agroforestal
Universidad de Lleida
Av. Alcalde Rovira Roure, 191, 25198 Lleida (España)
rlopez@eagrof.udl.cat

M.A. Colomer

Departamento de Matemática
Universidad de Lleida
C/Jaume II, 69 Campus Cappont., 25001 Lleida (España)

Resumen: En ríos con lecho constituido por material grueso heterométrico y flujo de baja sumersión relativa resulta difícil definir y medir variables relacionadas con la geometría de la sección transversal del cauce. En este artículo se ha calibrado, validado y comparado un modelo que permite relacionar el caudal de la corriente y su velocidad media sin incluir variables relativas a la geometría de la sección. Se seleccionó para ello un conjunto de 904 datos pertenecientes a más de 400 tramos de diferentes ríos con lecho granular de tamaño grava, canto o bolo. Se ha logrado un mejor ajuste cuanto mayor es el percentil granulométrico con el que se expresa el tamaño característico del sedimento. La capacidad explicativa del modelo ajustado es equiparable a la de la ecuación logarítmica tipo Keulegan y superior a la de la ecuación que no requiere una estimación explícita del coeficiente de resistencia al flujo. El ajuste segmentado del modelo estudiado, tomando como criterio de corte un valor de la pendiente del lecho del 8, supone una mejora de la bondad de ajuste para ambos subconjuntos en torno al 7 %.

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Generalmente, la predicción de la velocidad media (V) y de la resistencia al flujo en cauces de lámina libre requiere la intervención de variables referidas a la geometría de la sección transversal del cauce. Sin embargo, en ríos de fuerte pendiente y material grueso heterométrico, en los que predominan condiciones de baja sumersión relativa, la selección de secciones transversales representativas y la medida o aun la definición de variables como el ancho superficial (T), el perímetro mojado (P) o el área de la sección transversal (A) se ve dificultada por la complejidad e irregularidad morfológica de esta clase de cauces. En este contexto se ha planteado la utilidad de relacionar la velocidad media del flujo y el caudal (Q) de la corriente mediante ecuaciones empíricas que sólo incorporen variables explicativas cuya definición y medición en ríos de montaña sea más sencilla.

Las aproximaciones existentes se relacionan con los conceptos de régimen y de Geometría Hidráulica, en los que suele establecerse una relación potencial del tipo $V = cQ^m$ (siendo c y m los parámetros de ajuste). Dicha relación

es aplicable tanto para cambios del caudal en una misma sección del cauce como para diferentes secciones a lo largo del cauce fijado un determinado periodo de retorno del caudal. No obstante, para que este tipo de ecuaciones puedan aplicarse de forma más global (es decir, sin las restricciones de sección y periodo de retorno expuestas y a equivalencia de ecuaciones de resistencia al flujo como la de Manning o la de Darcy-Weisbach), diferentes autores han incluido de forma multiplicativa variables como S y el tamaño característico del sedimento (d_i , donde i es el porcentaje de sedimento que tiene un tamaño inferior).

Por ejemplo, Ruf (1988) ajustó el modelo $(V/S^{0.5}) = c(Q/d_{70})^p$ (siendo c y p los parámetros de ajuste) a un conjunto de 30 datos (Tabla 1) resultado de mediciones de velocidad con trazador salino en torrentes de muy alta pendiente. Obtuvo $c = 1,22$ y $p = 0,51$, proponiendo finalmente la ec.(1) (Tabla 1). Ruf (op. cit.) restringió la aplicación de la ec.(1) a torrentes no encauzados y en condiciones de lecho fijo. Nótese que el valor del exponente de S se tomó igual al de las ecuaciones de Manning y de Darcy Weisbach.

Referencia	Ecuación	No.	S (m/m)	Q (m ³ /s)	d_{90} (m)	N_c
Ruf (1988)	$V = 1,23 \cdot S^{0,5} Q^{0,5} d_{70}^{-0,5}$	1	0,09-0,60	0,002 3,5	0,35 1,85	30
Rickenmann (1994)	$V = 0,96 \cdot g^{0,36} S^{0,35} Q^{0,29} d_{90}^{-0,23}$	2	$8,5 \cdot 10^{-5}$ - $1 \cdot 10^{-2}$	0,3-2.400 ^a	0,03-0,81 ^a	187
Rickenmann (1994)	$V = 0,37 \cdot g^{0,33} S^{0,20} Q^{0,34} d_{90}^{-0,35}$	3	$6 \cdot 10^{-3}$ -0,63	0,03-140 ^a	0,05-2,1 ^a	217

V (m/s); S (m/m); Q (m³/s) d_i (m).

N_c = número de datos de calibración.

^aIntervalo de aplicación recomendado, que difiere ligeramente del intervalo de calibración

Tabla 1. Ecuaciones derivadas para ríos de material grueso

Rickenmann (1994) compiló un conjunto de 373 datos tomados en ríos con sedimento de tamaño grava o superior al objeto de derivar una ecuación de estructura similar a la ec.(1). Efectuó un análisis de regresión múltiple definiendo dos variables adimensionales: $Y = V/(g \cdot d_{90})^{1/2}$ y $X = Q^{1/3}/g^{1/6} d_{90}^{5/6}$. Tomó X y S como variables explicativas e Y como variable dependiente, adoptando un modelo potencial ($Y = a \cdot X^h S^j$, donde a , h y j son los parámetros de ajuste). A diferencia del trabajo de Ruf (op. cit.), en este caso el exponente de S sí era ajustable y, además, Q y $1/d_i$ no compartían exponente. La base de datos que compiló Rickenmann (op. cit.) abarca un intervalo de las variables hidráulicas y geomorfológicas mucho más amplio que el conjunto de Ruf (op. cit.) (Tabla 1). Debido a ello el primero de los citados autores ajustó el modelo a dos subconjuntos configurados al tomar la pendiente del lecho como criterio de corte y contemplando un intervalo de solape entre ambos (Tabla 1). Obtuvo una mejor correlación que con la ecuación ajustada al conjunto completo, aunque no suministró esta última ni cuantificó dicha mejora.

Rickenmann (1994) justificó el ajuste segmentado en virtud del cambio de tendencia observado en la relación entre S y el coeficiente de Manning (n), cambio que ocurría en torno al intervalo 0,6 3 %. Asimismo, en la relación entre sumersión relativa del flujo ($1/d_i$, siendo y el calado medio de la sección transversal) y coeficiente de Manning observó un fuerte incremento de n para valores de y/d_{90} inferiores al intervalo 3-4, lo que a efectos prácticos permitiría relacionar el punto de corte de y/d_{90} con el de S .

Rickenmann (op. cit.) recomendó $S = 8^\circ \setminus_{\infty}$ como criterio para elegir entre la aplicación de las ecs.(2) o (3). También Bathurst (2002) al modelar la relación entre sumersión relativa del flujo y factor de fricción de Darcy Weisbach mediante una ecuación de tipo potencial (ajustada a varios conjuntos de datos, representando cada

conjunto la variación de la resistencia local de un tramo al variar el caudal) detectó dos tendencias diferenciadas al tomar un umbral de la pendiente del $8^\circ \setminus_{\infty}$. Bajo dicho umbral la relación potencial ajustada mostró menor tasa de cambio que por encima.

La resistencia al flujo decrece acusadamente cuando el valor de y/d_i de una corriente sobre lecho de sedimento heterométrico supera el umbral del flujo de baja rugosidad. En condiciones de baja rugosidad la distribución vertical de velocidad puede aproximarse por una ley logarítmica, mientras que en flujo macrorrugoso se dan perfiles de diversas formas (Byrd *et al.*, 2000), lo que tiene importante repercusión en la modelación de la resistencia al flujo. Por otra parte, en ríos de montaña y para flujo que no desborde el cauce principal (*in bank flow*) el valor de y/d_i es bajo, por lo que en el contexto de escala general de un sistema fluvial puede establecerse una relación entre S y sumersión relativa. Asimismo, aunque de una forma más limitada, una interpretación de la dependencia de la resistencia al flujo y S la brinda el cambio en las formas de fondo de gran escala (p. ej., rápido poza o escalón poza) a lo largo del sistema fluvial. Ello es debido al mayor contraste que experimenta la resistencia entre escurrimientos de alta y baja sumersión paulatinamente desde lechos de grava, canto y bolo y que tiene su máximo exponente en lechos con secuencia escalón poza. De todo lo anterior se deduce que la adopción de un valor de corte para S implica implícitamente un umbral para y/d_i y también, aunque en menor grado, para las formas de fondo de gran escala.

Las ecs.(1)-(3) (Tabla 1) pueden escribirse de modo general como

$$V = c \cdot g^\lambda S^\alpha Q^\beta d_i^\delta \quad (4)$$

siendo c , λ , α , β y δ los coeficientes de ajuste. La ec.(4) es dimensionalmente homogénea si se cumple: $\lambda = (1 - \beta)/2$ y $\delta = (1 - 5\beta)/2$, lo que implica tres parámetros de ajuste. No obstante,

si se adopta $k = c \cdot g^\lambda$, permitiendo que k tenga dimensiones, puede escribirse

$$V = k \cdot S^\alpha Q^\beta d_i^\delta \quad (5)$$

siendo k , α , β , y δ los coeficientes de ajuste.

La ec.(5) podría utilizarse para estimar la velocidad media del flujo en el contexto de métodos para el cálculo de la propagación de avenidas en ríos de grava. De modo similar, permitiría calcular el tiempo de concentración de cuencas con ríos de material grueso, conociendo la variación del caudal punta a lo largo de la red de drenaje y sin que sea necesaria información detallada de la geometría de la sección mojada. En este ámbito, Orlandini *et al.* (2006) estudiaron la variación de la resistencia al flujo a lo largo del cauce principal de una cuenca alpina para un caudal de aguas bajas en régimen cuasi uniforme. Hallaron que la velocidad media del flujo en una determinada sección dependía de la pendiente de la superficie libre, del tamaño de las partículas de sedimento y del área de la cuenca drenante, mientras que la dependencia con el calado medio era menos susceptible de cuantificación. Si se tiene en cuenta que Q podría ser relacionada con el área de la cuenca drenante mediante una función potencial, lo anterior avala las variables explicativas seleccionadas en la ec.(5).

Objetivos

El principal propósito de esta investigación ha sido la evaluación del modelo representado por la ec.(5), lo que comprende su calibración, validación y comparación (comparando tanto con ecuaciones ajustadas previamente conforme al modelo seleccionado como con otros modelos que suponen aproximaciones alternativas). Para ello se seleccionó una numerosa base de datos representativa de un amplio intervalo de las variables hidráulicas y geomorfológicas en el contexto de ríos de lecho constituido por sedimento de tamaño grava o superior; lo que junto con la adopción del procedimiento de validación cruzada permitió contar con un conjunto de calibración considerablemente cuantioso. Se ha tenido el objetivo, además, de analizar la influencia que tiene el percentil granulométrico escogido para expresar d_i en la capacidad explicativa del modelo estudiado y, consecuentemente, identificar el percentil granulométrico con el que se logra un mejor ajuste experimental. Se ha pretendido analizar, asimismo, la influencia que tiene sobre la capacidad explicativa del modelo la adopción de S como variable de control a efectos de un ajuste segmentado.

MATERIAL Y MÉTODOS

Base experimental y criterios de selección de datos

A continuación se exponen los criterios de selección que se adoptaron para la compilación de la base de datos de calibración y validación. El tramo de río debía ser de canal único, de baja sinuosidad y cuasi prismático. El perímetro mojado debía encontrarse libre de cubierta vegetal importante y de obstáculos prominentes (ya fueran naturales o artificiales). Las condiciones del flujo debían aproximarse de forma suficiente a un régimen permanente y macroscópicamente uniforme y, además, no debía acontecer desbordamiento del cauce principal. La imposición de tales requisitos tiene el propósito de minimizar los efectos de la vegetación y de la variación geométrica del cauce (sección transversal, alineación y pendiente) en la resistencia al flujo. No obstante, es necesario tener presente que, debido a la morfología característica de los ríos grava y de montaña y a las condiciones de baja sumersión relativa de la corriente, en sentido estricto el flujo es variado a escala de detalle. Por consiguiente, la condición de uniformidad del flujo debe interpretarse como una propiedad promedio a lo largo del tramo. Es por ello que se consideró suficiente la igualdad entre las pendientes del lecho, de la superficie libre del agua y de la línea de energía como requisito de la uniformidad del flujo a escala macroscópica. O bien, cuando la comprobación anterior no fue posible, la igualdad entre las dos primeras y en su defecto la indicación por parte de los autores de que el flujo en el tramo era uniforme o cuasi uniforme. Además, debía confirmarse que el flujo era turbulento (número de Reynolds (Re) mayor de 2.000) e hidráulicamente rugoso (número de Reynolds de partícula (Re^*) mayor de 200).

Asimismo, se impuso que el sedimento fuera de tamaño grava, canto o bolo, excluyendo expresamente cauces con lecho de sedimento cohesivo, arena o roca. Para ello se obligó a que el valor de d_{50} fuera al menos de 2 mm. Para simplificar, en este artículo se entiende por cauce de grava (o de material grueso) todo aquel cuyo lecho se hallase constituido por sedimento granular no cohesivo con un diámetro mediano igual o superior a 2 mm, tanto si corresponde propiamente al tamaño de grava (entre 2 y 64 mm) como si es superior (e. d., canto o bolo).

Con ánimo de minimizar la influencia de las márgenes del cauce en la resistencia al flujo, se

impuso que la relación entre el ancho de la superficie libre (T) y el calado medio de la sección fuera mayor de 10 (lo que, además, implica $R \approx y$). Es necesario señalar que aunque las variables geométricas de la sección transversal del cauce (p. ej., R , y , T , P o área mojada (A)) no intervengan como variables en los modelos analizados sí que se dispuso de información sobre ellas para todos los datos seleccionados.

La base de datos compilada resultó de una combinación de varios conjuntos de datos tomados en un único tramo de río (e. d., que representan la variación de la resistencia al flujo al variar el caudal (*at a site*)) con un conjunto de datos tomado cada uno en un tramo diferente (*between sites*). La mayoría de las fuentes bibliográficas consultadas reúnen varios conjuntos del primer tipo. Pese a cumplir con los requisitos de selección, en ocasiones se observaron comportamientos anómalos en la totalidad o en parte los datos tomados en un tramo, por ejemplo, varias observaciones atípicas o tendencias anómalas de la resistencia al flujo con la sumersión relativa. En ese caso, se adoptó como criterio general rechazar la totalidad de los datos tomados en el tramo en cuestión, pero aceptar los datos obtenidos en otros tramos válidos que aparezcan en la misma fuente bibliográfica.

La aplicación de los criterios expuestos permitió la compilación de un conjunto de 904 casos experimentales de ríos, correspondientes a la inmensa mayoría a 24 referencias bibliográficas

del periodo 1955–2002 pero también a mediciones derivadas de investigación propia en ríos del Prepirineo de Lleida (España). Como se puede comprobar en la Tabla 1, el número de casos que integran la base de datos recopilada en este estudio supera ampliamente al de los conjuntos de calibración de las ecs.(1)–(3). La base de datos recabada corresponde a más de 400 tramos de diferentes ríos de grava y de montaña, principalmente localizados en los EUA, Nueva Zelanda, Canadá y el Reino Unido. Las variables de geometría hidráulica atribuidas al tramo (p. ej., A , y , R o S) se determinaron midiendo diferentes secciones transversales (en general, tres o más) separadas una distancia equivalente a varias veces el ancho del cauce, de manera que los datos incluidos representan las características medias a escala de tramo y no son el reflejo de las condiciones de una sección aislada.

Si se tiene presente el tamaño y variedad de la base de datos recabada, el número de fuentes consultadas y el periodo que éstas cubren, así como las condiciones de medida de variables hidráulicas en ríos de montaña, no es posible garantizar una uniformidad rigurosa ni en los procedimientos de medida ni en la calidad de los datos. Sin embargo, dado el tipo de variables medidas (velocidad media o caudal del flujo, distancia y tamaño de partícula) y la relativa similitud de los métodos empleados, puede considerarse que el grado de homogeneidad es suficientemente alto para el objetivo propuesto.

Variable	Símbolo	Unidades	Mínimo	Máximo	Media	C_v (%)
Base de datos de calibración ($N = 904$)						
Velocidad media	V	m/s	0,04	4,31	1,16	66
Pendiente del lecho	S	m/m	$1,00 \cdot 10^{-5}$	$1,60 \cdot 10^{-1}$	$1,09 \cdot 10^{-2}$	146
Caudal	Q	m ³ /s	$3,50 \cdot 10^{-3}$	$8,21 \cdot 10^3$	$9,22 \cdot 10^1$	496
Diámetro mediano	d_{50}	m	0,007	0,51	0,11	88
Sumersión relativa	y/d_{84}	m/m	0,11	120	7,81	166
Subconjunto de validación B_1 ($N = 452$)						
Velocidad media	V	m/s	0,05	4,29	1,18	63
Pendiente del lecho	S	m/m	$1,00 \cdot 10^{-5}$	$1,25 \cdot 10^{-1}$	$1,04 \cdot 10^{-2}$	138
Caudal	Q	m ³ /s	$3,50 \cdot 10^{-3}$	$8,21 \cdot 10^3$	$9,72 \cdot 10^1$	525
Diámetro mediano	d_{50}	m	0,010	0,51	0,11	86
Sumersión relativa	y/d_{84}	m/m	0,20	120	7,67	164
Subconjunto de validación B_2 ($N = 452$)						
Velocidad media	V	m/s	0,04	4,31	1,14	68
Pendiente del lecho	S	m/m	$8,50 \cdot 10^{-5}$	$1,60 \cdot 10^{-1}$	$1,14 \cdot 10^{-2}$	153
Caudal	Q	m ³ /s	$4,00 \cdot 10^{-3}$	$7,22 \cdot 10^3$	$8,72 \cdot 10^1$	458
Diámetro mediano	d_{50}	m	0,007	0,51	0,11	92
Sumersión relativa	y/d_{84}	m/m	0,11	98,8	7,94	168

Tabla 2. Intervalo de las variables hidráulicas para la base de datos de calibración y los subconjuntos de validación

A modo de síntesis de la base de datos, en la Tabla 2 se muestra el valor máximo, mínimo, medio y el coeficiente de variación de V , S , Q , d_{50} e y/d_{84} concernientes a la base de datos de calibración. Como puede apreciarse, el conjunto seleccionado es representativo de un amplio intervalo geomorfológico e hidráulico en el contexto de cauces de material granular grueso.

Evaluación de modelos

El modelo evaluado viene representado por la ec.(5). Se escogió dicha ecuación en detrimento de la ec.(4) porque se prefirió primar la máxima capacidad explicativa de la ecuación ajustada que su homogeneidad dimensional. A lo largo del presente artículo la ec.(5) se ha expresado en el Sistema Internacional de unidades, concretamente V en m/s, S en m/m, Q en m³/s y d_i en m.

En esta investigación la evaluación de modelos abarcó tres niveles: calibración, validación y comparación de modelos (entre sí y con modelos alternativos). La calibración consistió en el ajuste de los parámetros del modelo escogido tanto a la base de datos completa ($N = 904$) como a los dos subconjuntos de segmentación resultado de tomar S como variable de control. El análisis de regresión múltiple no lineal se efectuó sobre la transformación logarítmica de la ec.(5), con el fin de estabilizar varianzas. Dicho ajuste se llevó a término utilizando el programa SPSS, eligiendo un algoritmo de optimización no lineal (Levenberg Marquardt) que minimiza la suma de la diferencia cuadrática entre valores observados y predichos por el modelo.

Con el propósito de juzgar la bondad de ajuste y la capacidad explicativa del modelo propuesto se calculó el error típico de estimación (ET); el coeficiente de determinación (R^2); el coeficiente de eficiencia (E); el coeficiente de eficiencia modificado (E'); el error relativo medio (ERM); el porcentaje de datos con un error relativo inferior o igual al 50 % (ER₅₀) y al 25 % (ER₂₅); el error medio de simetría (EMS) y el porcentaje de datos con error por sobreestimación (ES). Además, se analizó gráficamente para cada conjunto de datos la relación entre valor observado y predicho de la variable dependiente (V). Es necesario indicar que los estadísticos de ajuste anteriormente referidos se calcularon para la versión antilogarítmica de la expresión resultado de la calibración de la transformación logarítmica de la ec.(5). Ello se justifica porque el usuario de las ecuaciones ajustadas normalmente las aplica en su versión antilogarítmica, que es la

forma más común de presentarlas, por lo que el análisis estadístico de dicha versión es de mayor interés.

En una segunda fase los modelos se validaron de forma cruzada, en la modalidad de intercambio de conjuntos (*test set switch*) (Esbensen *et al.*, 1994). A tal efecto, la base de datos completa ($N = 904$), que previamente se empleó para la calibración, se dividió aleatoriamente en dos subconjuntos de validación (B_1 y B_2) (Tabla 2), integrado cada uno por el 50 % de los datos (e.d., $N = 452$). Posteriormente, y de forma independiente para cada subconjunto de validación (B_1 y B_2), la fase de ajuste se repitió para las tres ecuaciones evaluadas (una por cada percentil granulométrico considerado, e.d., d_{50} , d_{84} y d_{90}), obteniendo, por consiguiente, dos ecuaciones por cada una. Finalmente, se calcularon los índices de bondad de ajuste para la ecuación ajustada con el conjunto B_1 pero empleando los datos del conjunto B_2 y viceversa. El valor final de los estadísticos de validación fue el obtenido como el promedio de los resultantes para cada subconjunto de validación. Procediendo de tal manera se pretendía evitar la pérdida de información en el conjunto de calibración que acarrearía la validación por segmentación independiente (*test set validation*), toda vez que dicha técnica requiere la división de la base de datos disponible y, por consiguiente, comporta un conjunto de calibración de menor tamaño. Sin embargo, gracias a la validación cruzada, a la vez que se mantiene integro el conjunto de datos durante la calibración también se dispone de una medida del error de predicción cometido por las ecuaciones calibradas cuando se aplican a casos independientes del ajuste.

En una tercera fase las ecuaciones ajustadas para cada percentil granulométrico se compararon entre sí, tomando como criterio el valor de los estadísticos de ajuste tanto resultado de la calibración como de la validación. Asimismo, se comparó la capacidad explicativa de las ecuaciones ajustadas conforme a la ec.(5) con la capacidad de dos modelos alternativos de predicción de la resistencia al flujo. El primero es una ecuación de tipo Keulegan, basada en una distribución vertical de la velocidad que sigue una ley logarítmica

$$\frac{V}{v_*} = 5,76 \log \left(\frac{12,14y}{\varphi \cdot d_{90}} \right) \quad (6)$$

siendo v_* la velocidad de corte (pudiéndose estimar en flujo uniforme como $v_* = (g \cdot R \cdot S)^{1/2}$) y el coeficiente de proporcionalidad entre la as-

pereza equivalente del contorno y el tamaño característico de la partícula. Dicho coeficiente es el único parámetro de ajuste de la ec.(6). El segundo modelo se basa en la suposición de que el coeficiente de resistencia al flujo puede correlacionarse con la geometría de la sección mojada y la pendiente, por lo que no es necesaria una estimación explícita de dicho coeficiente de resistencia. La ecuación escogida para representar este enfoque se ajustó a la misma base de datos que la empleada en el presente artículo (López *et al.*, 2007)

$$V = 6,04R^{0,82}S^{0,26} \quad (7)$$

Nótese que, a diferencia de la ec.(5), las ecs.(6) y (7) sí que permiten relacionar Q o V con variables geométricas de la sección transversal (p.ej., y o R); y que la ec.(7) no requiere información granulométrica.

Segmentación de la base de datos

Con posterioridad a las tres fases de la evaluación de la ec.(5) se estudió la incidencia de la segmentación de la base de datos ($N = 904$) en su capacidad explicativa al tomar S como variable de control. Se adoptó un valor de S igual a 0,008 m/m como criterio de corte, en consonancia con lo recomendado por Rickenmann (1994) y Bathurst (2002). En la Tabla 3 se muestra el valor máximo, mínimo, medio y el coeficiente de variación de V , S , Q , d_{50} e y/d_{84} concernientes a los dos subconjuntos de segmentación. El subconjunto con $S \leq 8\text{‰}$ es mayoritario, pues representa casi el 60 % del total. Dicho conjunto muestra un valor medio de Q que es un orden de magnitud mayor que el del conjunto con

$S > 8\text{‰}$. Ello es atribuible en mayor medida a la diferencia en A , pues la diferencia en el valor medio de V de ambos subconjuntos es relativamente baja. La diferencia del valor medio de S es aproximadamente de un orden de magnitud. El conjunto con $S > 8\text{‰}$ presenta un valor medio de d_{50} que es mayor que el doble del valor del subconjunto complementario, lo que se explica por la disminución de d_{50} a medida que S decrece hacia aguas abajo. La combinación en y/d_{84} de las características granulométricas del sedimento y de la profundidad media, provoca que el subconjunto con $S > 8\text{‰}$ se alcancen valores medios de y/d_{84} que son seis veces menores que en el subconjunto complementario.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

De forma previa a la calibración de la ec.(5) se comprobó que el nivel de multicolinealidad (correlación lineal entre variables independientes) no fuera tan intenso como para comprometer la precisión y estabilidad de la estimación de parámetros. Se empleó para ello el Factor de Incremento de la Varianza (FIV), que mide directamente el incremento que se produce en la varianza de cada parámetro en comparación con la situación de variables independientes no correlacionadas. El valor del FIV se obtiene: $FIV_j = 1/(1 - R_j^2)$, denotando R_j^2 el coeficiente de determinación obtenido al efectuar la regresión de la j -ésima variable predictora sobre el resto de las variables predictoras del modelo. Algunos estadísticos consideran con frecuencia que se dan problemas graves de multicolinealidad cuando el FIV es superior a 10

Variable	Símbolo	Unidades	Mínimo	Máximo	Media	C_v (%)
Subconjunto $S \leq 8\text{‰}$ ($N = 530$)						
Velocidad media	V	m/s	0,09	4,31	1,26	64
Pendiente del lecho	S	m/m	$1,00 \cdot 10^{-5}$	$8,00 \cdot 10^{-3}$	$3,16 \cdot 10^{-3}$	69
Caudal	Q	m ³ /s	$2,50 \cdot 10^{-2}$	$8,21 \cdot 10^3$	$1,49 \cdot 10^2$	397
Diámetro mediano	d_{50}	m	0,007	0,301	0,066	68
Sumersión relativa	y/d_{84}	m/m	0,42	120	12,1	128
Subconjunto $S > 8\text{‰}$ ($N = 374$)						
Velocidad media	V	m/s	0,40	3,75	1,03	66
Pendiente del lecho	S	m/m	$8,06 \cdot 10^{-3}$	$1,60 \cdot 10^{-1}$	$2,19 \cdot 10^{-2}$	91
Caudal	Q	m ³ /s	$3,50 \cdot 10^{-3}$	$2,82 \cdot 10^2$	$1,16 \cdot 10^1$	244
Diámetro mediano	d_{50}	m	0,009	0,509	0,168	69
Sumersión relativa	y/d_{84}	m/m	0,11	20,3	1,76	110

Tabla 3. Intervalo de las variables hidráulicas para los subconjuntos de segmentación según pendiente

Estadístico	Ec.(8)		Ec.(9)		Ec.(10)	
	$V = 1,34 \cdot S^{0,32} Q^{0,34} d_{50}^{-0,22}$		$V = 1,56 \cdot S^{0,33} Q^{0,34} d_{84}^{-0,25}$		$V = 1,62 \cdot S^{0,33} Q^{0,34} d_{90}^{-0,25}$	
	Calibración	Validación	Calibración	Validación	Calibración	Validación
ET (m s ⁻¹)	0,454	0,459	0,393	0,394	0,393	0,395
R ²	0,773	0,772	0,776	0,775	0,775	0,774
E	0,646	0,637	0,734	0,733	0,735	0,731
E'	0,540	0,531	0,599	0,596	0,600	0,596
ERM (%)	27,0	27,5	22,4	22,4	22,2	22,3
ER ₂₅ (%)	58,6	57,3	65,6	65,4	65,9	65,3
ER ₅₀ (%)	86,8	86,8	94,1	93,9	94,5	93,9
EMS (%)	14,9	15,3	4,15	4,16	3,72	3,95
ES (%)	66,5	66,0	50,3	52,0	50,4	51,3

V (m/s); S (m/m); Q (m³/s); d_i (m).

Tabla 4. Ecuaciones ajustadas y estadísticos de calibración y validación de las ecs.(8)–(10)

Intervalo de confianza	Parámetro											
	Ec.(8)				Ec.(9)				Ec.(10)			
	k	α	β	δ	k	α	β	δ	k	α	β	δ
95 % superior	1,45	0,34	0,35	-0,19	1,66	0,35	0,35	-0,22	1,74	0,35	0,35	-0,22
95 % inferior	1,24	0,30	0,33	-0,24	1,45	0,31	0,33	-0,28	1,51	0,31	0,33	-0,28

Tabla 5. Intervalo de confianza para los parámetros de las ecs.(8)–(10)

(Kleinbaum *et al.*, 1988), aunque otros indican que las consecuencias pueden ser ya relevantes para valores superiores a 5. Los valores del FIV obtenidos con la base de datos completa ($N = 904$) para $\log(S)$, $\log(Q)$ y $\log(d_{90})$ son 1,9, 1,2, 1,6, respectivamente. Los tres valores son muy inferiores al umbral de 10 y aún al de 5. Para $\log(d_{84})$ y $\log(d_{50})$ se obtienen valores similares.

En la Tabla 4 se muestran las ecs.(8) (10), versiones antilogarítmicas de las ecuaciones ajustadas mediante transformación logarítmica de la ec.(5). Cada una de las tres ecuaciones citadas se corresponde con uno de los tres percentiles granulométricos considerados, e. d., d_{50} , d_{84} y d_{90} . También se especifica en la Tabla 4 el valor de los estadísticos de ajuste concernientes a la base de datos de calibración ($N = 904$) y correspondientes a las ecs.(8)–(10). Por otro lado, en la Figura 1 se ha representado el valor observado de V contra el predicho por las ecs.(8)–(10). Asimismo, en la Tabla 5 se muestra el intervalo de confianza del 95 % para los parámetros ajustados en las ecs.(8)–(10).

En primer lugar cabe llamar la atención sobre la similitud del valor de los parámetros ajustados en las ecs.(9) y (10). De las Tablas 4 y 5 se deduce que al nivel de confianza del 95 % no hay diferencias significativas entre los coeficientes y exponentes de las ecs.(9) y (10), puesto

que el valor de éstos en la ec.(9) se halla en el interior del intervalo de confianza del 95 % estimado para la ec.(10) y viceversa. Lo anterior se cumple también para los exponentes de S y Q de la ec.(8), pero no para el coeficiente k y el exponente de d_{50} . Ello se explicaría por la proximidad entre d_{90} y d_{84} y a la diferencia de ambos respecto al diámetro mediano.

A efectos meramente comparativos con la ec.(10), se ha obtenido el promedio ponderado (en función del número de datos de ajuste) de los parámetros de las ecs.(2) y (3), resultando

$$V = 1,43 \cdot S^{0,27} Q^{0,32} d_{90}^{-0,29} \quad (8)$$

La ec.(11) es similar a la ec.(10), si bien sus coeficientes son significativamente diferentes al nivel de confianza del 95 %.

Si se compara el valor de los índices estadísticos de calibración que aparecen en la Tabla 4 se deduce que se logra una mayor capacidad explicativa si el diámetro característico se expresa en función de los percentiles más gruesos (d_{90} o d_{84}) que en función del diámetro mediano (d_{50}). El valor de los estadísticos de la ecuación que ha logrado el mejor ajuste (ec.(9) o (10), dependiendo del estadístico considerado) ha supuesto en promedio una mejora del 20 % respecto a la ec.(8). Si se excluye R^2 (cuyo valor no muestra prácticamente variación con d_i) la mejora pro-

medio ha sido del 22 %. Lo anterior, es coincidente con los hallazgos de otros investigadores al ajustar diversos modelos de estimación del factor de fricción de Darcy Weisbach en cauces de contorno granular. Con arreglo a ello, es preferible la aplicación de ecuaciones ajustadas con d_{90} o d_{84} en perjuicio de las ajustadas con d_{50} , lo que también puede servir de guía para futuras calibraciones si se pretende usar un único percentil.

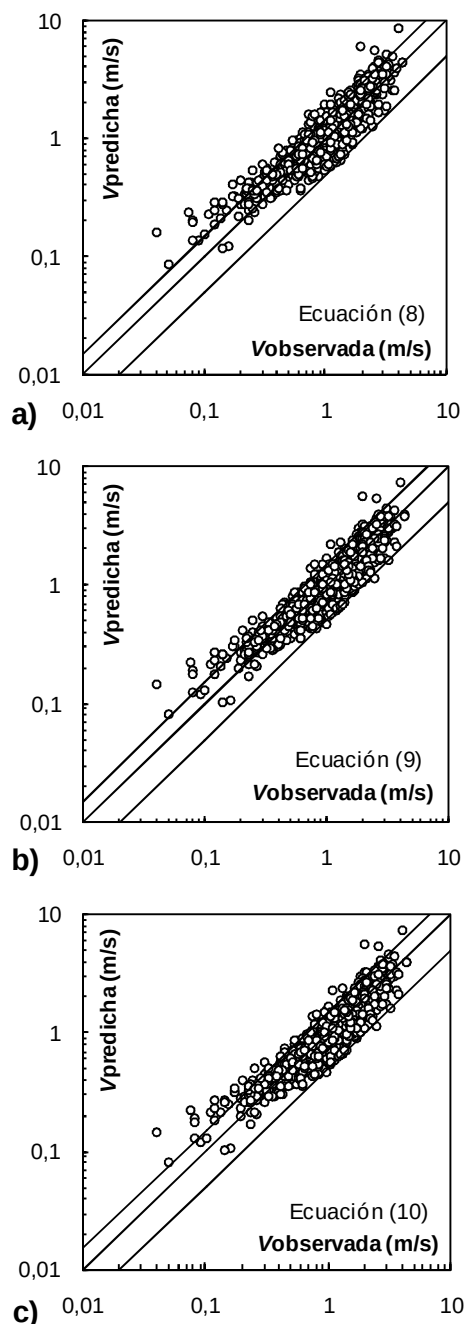


Figura 1. Valores observados de V contra predichos por las ecs.(8)–(10). Se han representado las líneas de ajuste perfecto y de $\pm 50\%$ de error

Pese a que el modelo evaluado se ha transformado logarítmicamente para su ajuste (lo que estabiliza la varianza y evita que en el ajuste se prime la minimización del error de los datos de mayor magnitud en perjuicio de los de menor), la Figura 1 revela que las ecs.(8)–(10) tienden a sobreestimar de forma acusada en el intervalo de V observada inferior a 0,2 m/s. Por consiguiente, se recomienda evitar el uso de las ecs.(8)–(10) cuando el valor de V observada sea inferior a 0,2 m/s (o incluso cuando el valor predicho de V sea inferior a 0,3 m/s).

La Tabla 2 muestra el valor mínimo y máximo, el promedio y el coeficiente de variación de V , S , Q , d_{50} y y/d_{84} para los dos subconjuntos de validación aleatoriamente generados (B_1 y B_2). Puede apreciarse que ambos subconjuntos son muy similares entre sí y, a la vez, que se asemejan a la base de calibración completa. Además, la prueba de la distribución t de Student para igualdad de medias y la prueba de la distribución F de Fisher Snedecor para comparación de varianzas aplicadas a los dos subconjuntos de validación (B_1 y B_2) han confirmado la similitud de ambos (para cada una de las variables mostradas en la Tabla 2) al nivel de significación de 0,05. En la Tabla 4 se muestra el valor de los diferentes índices estadísticos resultado de la validación cruzada. Si éstos se comparan con los correspondientes a la calibración puede deducirse que no hay prácticamente diferencias, lo que avala la equivalencia entre capacidad predictiva y explicativa de las tres ecuaciones ajustadas.

Puesto que la ec.(10) es la que ha alcanzado un mejor ajuste de entre las que aparecen en la Tabla 2, se escogió para contrastarla con los otros dos modelos alternativos, representados éstos por las ecs.(6) y (7). En la Tabla 6 se muestra el valor de los índices estadísticos para las dos últimas, calculados respecto a la base de datos de calibración ($N = 904$). En el caso de la ec.(6) el valor ajustado de φ ha resultado ser igual a 2,47. Si se compara el ajuste de las ecs.(6) y (7) con el de la ec.(10) (Tabla 4) se aprecia que la capacidad explicativa de la ec.(6) y la de la ec.(10) son equiparables. Por el contrario, la bondad de ajuste de la ec.(7) es notablemente inferior a la de la ec.(10), siendo del orden, y aun algo menor, que la de la ec.(8) que toma d_{50} como variable explicativa. Debe tenerse en cuenta que la ec.(6) requiere el ajuste de un solo parámetro y que la ec.(7) tiene la ventaja de no precisar información granulométrica del material del lecho. Aunque, evidentemente, si lo que se pretende es evitar la necesidad de contar

con información de la geometría de la sección transversal, el modelo representado por la ec.(5) no puede ser sustituido por las ecs.(6) o (7). Lo que pone de manifiesto este contraste es que la aproximación que representa la ec.(10) cuenta con una capacidad explicativa que no es inferior a la de otros modelos propuestos.

Intervalo	Ec.(6)	Ec.(7)
ET	0,371	0,455
R^2	0,799	0,665
E	0,764	0,643
E'	0,582	0,470
ERM (%)	25,3	34,7
ER ₂₅ (%)	61,0	53,7
ER ₅₀ (%)	87,9	81,5
EMS (%)	9,20	9,31
ES (%)	55,8	46,8

Tabla 6. Valor de los índices estadísticos de ajuste para las ecs.(6) y (7)

Dado que la ec.(10) es la que ha mostrado un mejor ajuste a la base de datos compilada y con ánimo de facilitar el análisis de la influencia de S , se ha expresado el diámetro característico de la ec.(5) únicamente en función de d_{90} . Además, de ese modo se facilita la comparación con las ecs.(2) y (3) ajustadas por Rickenmann (1994). En la Tabla 7 se muestran las ecs.(12) y (13), que corresponden a los subconjuntos con $S \leq 8^\circ/\infty$ y con $S > 8^\circ/\infty$, respectivamente, y se consignan los valores de los estadísticos de ajuste. En las Figuras 2a y 2b se muestra el valor observado de V contra el valor predicho por las ecs.(12) y (13) y en la Figura 3a se ha representado S contra el cociente entre el valor predicho de V (por dichas ecuaciones) y el observado. Además, en la Tabla 8 se muestra el intervalo de confianza del 95 % para los parámetros ajustados en las ecs.(12) y (13).

Mediante el ajuste segmentado al tomar S como variable de control se han obtenido ecuaciones para cada subconjunto que son significativamente diferentes entre sí. En efecto, los intervalos de confianza del 95 % correspondientes a los coeficientes y exponentes de las ecs.(12) y (13) no se solapan, a excepción de los intervalos del exponente de S . Con el fin de analizar el efecto de la segmentación en la capacidad explicativa se ha comparado el valor de los índices estadísticos de las ecs.(12) y (13) (Tabla 7) con los calculados aplicando la ec.(10) a los dos subconjuntos definidos al tomar S como variable de control (Tabla 7). Asimismo, en la Figura 2c se

ha representado la relación entre datos observados y predichos por la ec.(10) distinguiendo los puntos en función de S , y en la Figura 3b se ha representado S contra el cociente entre la V predicha por la ec.(10) y la observada.

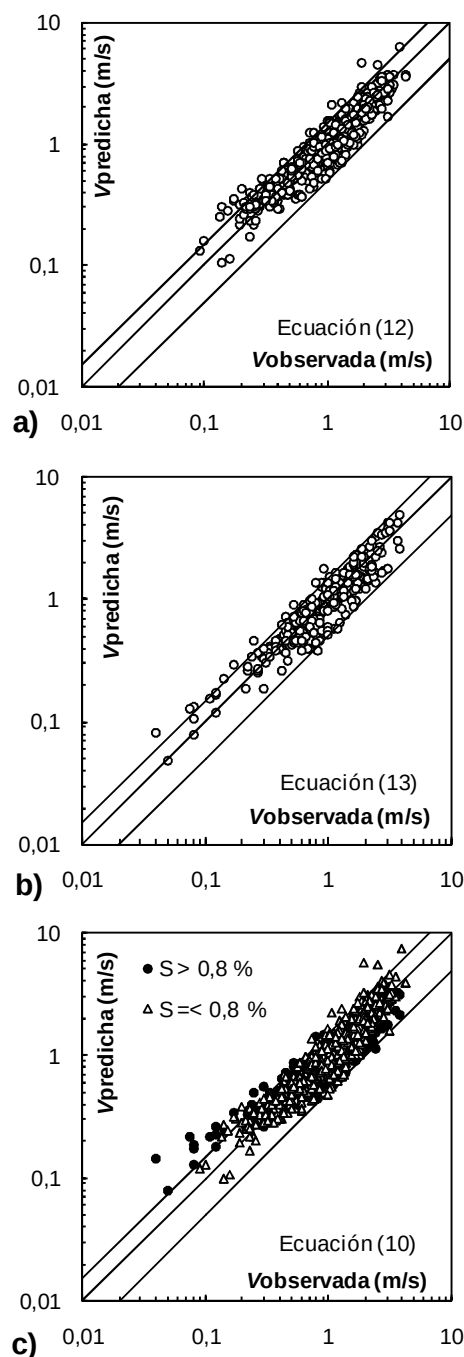


Figura 2. Subconjuntos de segmentación. Valores observados de V contra predichos por las ecs.(12), (13) y (10). Se han representado las líneas de ajuste perfecto y de $\pm 50\%$ de error

Estadístico	Ec.(12)($S \leq 8^\circ/\infty$) $V = 2,06 \cdot S^{0,33} Q^{0,31} d_{90}^{-0,18}$	Ec.(13)($S > 8^\circ/\infty$) $V = 1,20 \cdot S^{0,31} Q^{0,41} d_{90}^{-0,39}$	Ec.(10) $S \leq 8^\circ/\infty$	Ec.(10) $S > 8^\circ/\infty$
R^2	0,829	0,813	0,788	0,793
E	0,814	0,791	0,705	0,775
E'	0,648	0,602	0,598	0,580
ERM (%)	20,4	19,6	21,4	23,3
ER ₂₅ (%)	69,2	71,7	66,0	65,8
ER ₅₀ (%)	94,9	96,3	94,7	94,1
EMS (%)	3,35	2,53	3,62	3,85
ES (%)	50,9	52,1	50,0	51,1

V (m/s); S (m/m); Q (m³/s); d_i (m).

Tabla 7. Ecs.(12) y (13), ajustadas a los subconjuntos de segmentación según S y estadísticos de ajuste de la ec.(10) en cada uno de dichos subconjuntos

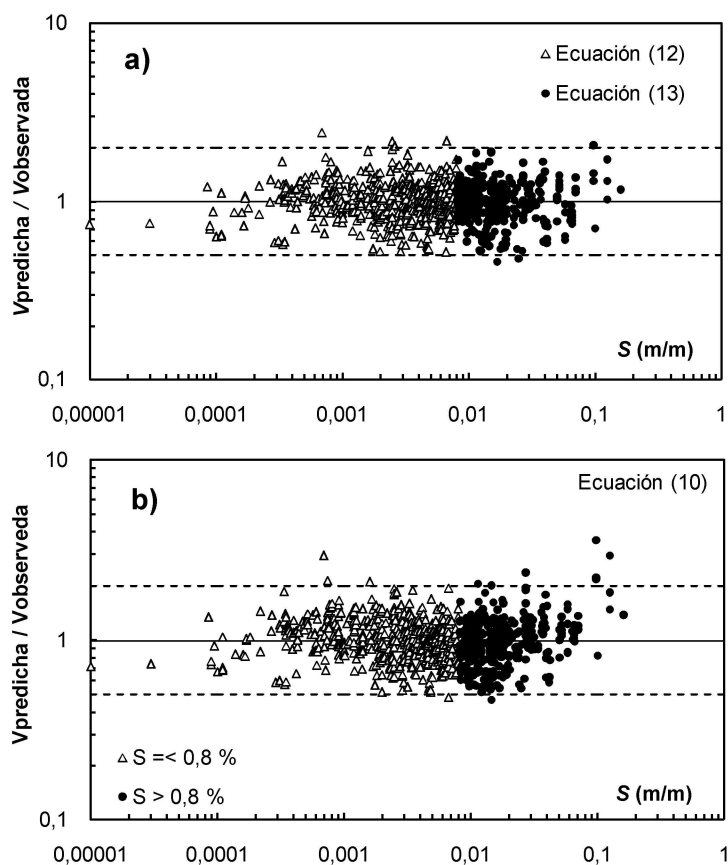


Figura 3. Relación de V predicha por las ecs.(12), (13) y (10) y V observada contra S

De la comparación de la información anterior se deduce que el ajuste segmentado conlleva un incremento moderado de la capacidad explicativa y de la bondad de ajuste en ambos subconjuntos. Para el conjunto con $S \leq 8^\circ/\infty$ los estadísticos considerados han experimentado en promedio una mejora del 6 %, mientras que para el conjunto con $S > 8^\circ/\infty$ ésta ha sido del

8 %. Nótese que dicha mejora ha sido inferior a la lograda al expresar el percentil granulométrico con d_{90} o d_{84} en vez de con el diámetro mediano (d_{50}), que fue del 20 %. Interesa el análisis de forma más localizada del efecto de la segmentación en los datos de menor V ($< 0,2$ m/s), dado que ha sido el intervalo en el que las ecuaciones (8)–(10) se han ajustado peor. En la Figura 2c

puede apreciarse que de los datos con $V < 0,2$ m/s los que han mostrado un mayor error de predicción por la ec.(10) han sido los del subconjunto con $S > 8^\circ/\infty$. La ec.(13) ha logrado una mejora del ajuste a tales datos (Figura 2b); a título de ejemplo el valor de ERM se reduce un 61 %, aunque el ajuste continúa siendo notablemente peor que para el resto del subconjunto.

Resulta de interés estudiar cómo se comporta el error con la variación de S , ya que ésta ha sido tomada como variable de control. En términos generales, en la Figura 3b no se advierte un sesgo sistemático para la ec.(10), a excepción de un pequeño grupo de datos correspondientes al extremo superior de S , para los que se da una tendencia a la sobreestimación. Sin embargo, en la Figura 3a también se advierte que dicha tendencia se atenúa de forma considerable al reducirse el error cometido por la ec.(13).

Al comparar los coeficientes y exponentes de las ecs.(2) y (3) se ha observado que para el conjunto de mayor S el coeficiente k y los exponentes de S y d_{90} disminuyen, mientras que el exponente de Q aumenta. La misma tendencia se ha observado al comparar las ecs.(12) y (13). Asimismo, el hecho de que la ec.(1) se ajustó con datos de gran pendiente explicaría el elevado valor del exponente p . Por otra parte, resulta de interés la comparación de las ecs.(12) y (13) con sus correspondientes ajustadas por Rickenmann (1994). El coeficiente k y el exponente de S de la ec.(2) no son significativamente diferentes al nivel de confianza del 95 % de los de su homóloga, y los exponentes de Q y de d_{90} se encuentran muy próximos al límite del intervalo del citado nivel de confianza (Tabla 8). Lo anterior se explica porque los intervalos de las variables hidráulicas de la base de datos de ajuste de las citadas ecuaciones son en gran medida coincidentes (véanse la Tabla 1 y la Tabla 3). Sin embargo, no ocurre así con las ecs.(3) y (13), dado que la primera incluía en su base de datos de ajuste cauces con pendiente sensiblemente mayor y sedimento considerablemente más grueso.

Ello podría explicar el hecho de que las ecs.(3) y (13) difieran en mayor grado que sus homólogas del conjunto de pendiente menor. En efecto, tres de los parámetros de la ec.(3) se hallan fuera y relativamente alejados del intervalo de confianza del 95 % de la ec.(13) (Tabla 8) y el cuarto, el exponente de d_{90} , coincide con el límite superior del citado intervalo.

CONCLUSIONES

El modelo ajustado es válido para cauces hidráulicamente anchos pertenecientes a ríos de grava y a cursos de montaña en los que el efecto de la vegetación y de la variación macroscópica (a escala de tramo) de la forma del cauce en la resistencia al flujo sea mínimo y en los que no acontezca desbordamiento del cauce principal. Gracias a la aplicación del procedimiento de validación cruzada, la base de calibración se halla constituida por un total de 904 casos experimentales, uno de los conjuntos más numerosos empleados para el ajuste de modelos de resistencia al flujo en ríos de material grueso.

Se ha encontrado que si el diámetro característico del sedimento se expresa en función de los percentiles granulométricos más gruesos (d_{84} o d_{90}) se alcanza una mayor capacidad explicativa que si se expresa en función del diámetro mediano (d_{50}), en promedio un 20 % en términos de los índices estadísticos considerados. La capacidad explicativa de la ec.(5) es equiparable a la de la ecuación logarítmica de tipo Keulegan y superior a la de la ecuación sin coeficiente de resistencia explícito. No se recomiendan las ecuaciones ajustadas al conjunto completo de datos cuando la velocidad media sea inferior a 0,2 m/s, debido a su deficiente ajuste en el citado intervalo.

La adopción de la pendiente del lecho como variable de control para un ajuste segmentado del modelo analizado logra un incremento moderado de la capacidad explicativa: en promedio el 6 % para el subconjunto con $S \leq 8^\circ/\infty$ y el

Intervalo de confianza	Parámetro							
	Ec.(12)				Ec.(13)			
	k	α	β	δ	k	α	β	δ
95 % superior	2,36	0,35	0,32	-0,15	1,44	0,36	0,43	-0,35
95 % inferior	1,81	0,31	0,30	-0,22	1,00	0,26	0,39	-0,44

Tabla 8. Intervalo de confianza para los parámetros de las ecuaciones (12)–(13)

$8^\circ/\infty$ para el subconjunto con $S > 8^\circ/\infty$. Por lo tanto, se deduce que para el intervalo estudiado la capacidad explicativa se muestra más sensible al percentil granulométrico que al ajuste segmentado en función de S .

LISTA DE SÍMBOLOS

d_i : diámetro intermedio de la partícula para el que el $i\%$ de la muestra es inferior [L]
 g : constante de aceleración de la gravedad [LT^{-2}]
 v^* : velocidad de corte [LT^{-1}]
 y : calado medio del flujo [L]
 Q : caudal del flujo [L^3T^{-1}]
 R : radio hidráulico [L]
 S : pendiente longitudinal del cauce [-]
 V : velocidad media del flujo [LT^{-1}]
 φ : coeficiente de proporcionalidad [-]

REFERENCIAS

- Andrews, E.D., (1984). Bed material entrainment and hydraulic geometry of gravel bed rivers in Colorado. *Geol. Soc. Am. Bull.*, 95, 371–378.
- Barnes, H.H., (1967). Roughness characteristics of natural channels. U.S. Geol. Surv. Water Supply, Pap. 1849, Washington DC, USA.
- Bathurst, J.C., (1978). Flow resistance of large-scale roughness. *J. Hydraul. Div. ASCE*, 104(12), 1587–1603.
- Bathurst, J.C., (1985). Flow resistance estimation in mountain rivers. *J. Hydraul. Eng.*, 111(4), 625–643.
- Bathurst, J.C., (2002). At a site variation and minimum flow resistance for mountain rivers. *J. Hydrol.*, 269(1-2), 11–26.
- Bray, D.I., (1979). Estimating average velocity in gravel-bed rivers. *J. Hydraul. Div. ASCE*, 105(9), 1103–1123.
- Byrd, T.C., Furbish, D.J. y Warburton, J., (2000). Estimating depth averaged velocities in rough channels. *Earth Surf. Process. Landforms*, 25, 167–173.
- Charlton, F.G., Brown, P.M. y Benson, R.W., (1978). The hydraulic geometry of some gravel rivers in Britain. Report No. IT 180, Hydraulics Research Station, Wallingford, UK.
- Colosimo, C., Copertino, V.A. y Veltri, M., (1988). Friction factor evaluation in gravel bed rivers. *J. Hydraul. Eng.*, 114(8), 861–876.
- Crusellas, J., (2000). Estudi de paràmetres i morfologies fluvials per a ajustar les estimacions de rugositat en càlculs de resistència al flux. Treball final de carrera, ETS d'Enginyeria Agrària, Universitat de Lleida, Lleida, España.
- Esbensen, K., Schönkopf, S. y Midtgaard, T., (1994). *Multivariate Analysis in Practice*. CAMO AS, Trondheim, Norway.
- Griffiths, G.A., (1981). Flow resistance in coarse gravel bed rivers. *J. Hydraul. Div. ASCE*, 107(7), 899–918.
- Hey, R.D., (1979). Flow resistance in gravel bed rivers. *J. Hydraul. Div. ASCE*, 105(4), 365–379.
- Hey, R.D. y Thorne, C.R., (1986). Stable channels with mobile gravel beds. *J. Hydraul. Eng.*, 112(8), 671–689.
- Hicks, D.M. y Mason, P.D., (1991). Roughness characteristics of New Zealand rivers. New Zealand Water Resources Survey, DSIR Marine and Freshwater, Wellington, NZ.
- Jarrett, R.D., (1984). Hydraulic of high gradient streams. *J. Hydraul. Eng.*, 110(11), 1519–1539.
- Judd, H.E. y Peterson, D.F., (1969). Hydraulics of large bed elements channels. Report No. PRWG 17 6, Water Research Laboratory, State University, Logan, Utah, USA.
- Kellerhals, R., (1967). Stable channels with gravel-paved beds. *J. Waterways and Harbors Div. ASCE*, 93(1), 63–84.
- Kleinbaum, D.G., Kupper, L.L. y Muller, K.E., (1988). *Applied regression analysis and other multivariable methods*. PWS Kent Publishing Company, Boston, Mass., USA.
- Lee, A.J. y Ferguson, R.I. (2002). Velocity and flow resistance in step-pool streams. *Geomorphology*, 46, 59–71.
- Legates, D.R. y McCabe, G.J., (1999). Evaluating the use of “goodness of fit” measures in hydrologic and hydroclimatic model validation. *Water Resour. Res.*, 35(1), 233–241.
- López, R., (2005). Resistencia al flujo de ríos de montaña. Desarrollo de ecuaciones de predicción. Tesis doctoral, Universitat de Lleida, Lleida, España.
- López, R., Barragán, J. y Colomer, M.A., (2007). Flow resistance equations without explicit estimation of the resistance coefficient for coarse-grained rivers. *J. Hydrol.*, 338(1-2), 113–121.

- Marcus, W.A., Roberts, K., Harvey, L. y Taskman, G., (1992). An evaluation of methods for estimating Mannings n in small mountain streams. *Mt. Res. Dev.*, 12(3), 227–239.
- Maresova, I. y Mares, K., (1989). Flow resistance of channel bed of submountainous rivers. *Technical Papers of the Faculty of Civil Engineering, Technical University of Prague, Czechoslovakia, Serie V*, 9, 269–305.
- Nikora, V.I., Goring, D.G. y Biggs, B.J.F., (1998). On gravel bed roughness characterization. *Water Resour. Res.*, 34(3), 517–527.
- Orlandini, S., Boaretti, C. y Guidi, V., Sfondrini, G., (2006). Field determination of the spatial variation of resistance to flow along a steep Alpine stream. *Hydrol. Process.*, 20(18), 3897–3913.
- Pitlick, J., (1992). Flow resistance under conditions of intense gravel transport. *Water Resour. Res.*, 28(3), 891–903.
- Prestegard, K.L., 1983. Bar resistance in gravel bed streams at bankfull stage. *Water Resour. Res.*, 19(2), 472–476.
- Rickenmann, D., (1994). An alternative equation for the mean velocity in gravel bed rivers and mountain torrents. Cotroneo, G.V., Rumer, R.R. (eds.), *Proceedings of the ASCE National Conference on Hydraulic Engineering*, vol. 1, American Society of Civil Engineers, Reston, Va, USA, pp. 672–676.
- Ruf, G., (1988). Neue ergebnisse über die fließgeschwindigkeit in sehr rauhen gerinnen (wildbächen). *Internationales Symposion Interpraevent 1988-Graz, Tagungspublikation*, Band 4, Graz, Ostereich, pp. 165–176.
- Thompson, S.M. y Campbell, P.L., (1979). Hydraulics of a large channel paved with boulders. *J. Hydraul. Res.*, 17(4), 341–354.
- Thorne, R.C. y Zevenbergen, L.W., (1985). Estimating mean velocity in mountain rivers. *J. Hydraul. Eng.*, 111(4), 612–624.
- Wolman, M.G., (1955). The natural channel of Brandywine Creek, Pennsylvania. *Geological Survey Professional Paper 271*, US Geological Survey, Washington DC, USA.