

INTERPOLACIÓN ESPACIAL DE SERIES DE PRECIPITACIÓN DIARIA

M.F. Moreno-Pérez y J. Roldán Cañas

Ingeniería Hidráulica
Departamento de Agronomía, Campus Universitario de Rabanales
Universidad de Córdoba
Colonia de San José Bloque no. 4, 2o., 14071 Córdoba
mfatima@uco.es

Resumen: Con el fin de generar registros sintéticos de precipitación diaria en lugares en los que no se dispone de datos, se han propuesto gran variedad de métodos a escala regional. Sin embargo, estos métodos solo han considerado la influencia de variables geográficas. En este sentido, se han empezado a desarrollar métodos que tienen en cuenta variables climáticas que pueden ser fácilmente identificadas y medidas en cualquier punto. Debido a las características climáticas de Andalucía, en la que coexisten varias zonas montañosas junto con el valle del Guadalquivir que se abre al Océano Atlántico, las variables geográficas consideradas en el estudio han sido la distancia al mar y la altitud sobre el nivel del mar, mientras que las variables climáticas que se han tenido en cuenta son la precipitación media anual y el número medio de días lluviosos. El procedimiento que hemos seguido se basa en la estimación de los parámetros del modelo estocástico cadena de Markov - mixta exponencial, y consiste en la ponderación de los valores de las variables, teniendo en cuenta su proximidad a los puntos sin registro de lluvia. Una vez se han estimado los coeficientes, se han simulado series de 52 años de precipitación diaria en las dos estaciones elegidas como testigo.

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos fundamentales de los estudios hidrológicos es determinar la variabilidad de la lluvia, tanto temporal como espacialmente. De hecho, la precipitación es una de las variables de entrada más importantes en el modelado hidrológico (French *et al.*, 1992).

Mientras que el modelado temporal de la lluvia está suficientemente estudiado (Woolhiser y Pegram, 1979; Woolhiser y Roldán, 1986; Hanson *et al.*, 1989; Alcalde, 1986; Woolhiser, 1992; Pérez Lucena *et al.*, 1994), la distribución espacial se encuentra todavía en pleno desarrollo (French *et al.*, 1992; Buytaert *et al.*, 2006). En este sentido, los métodos de interpolación normalmente usados para obtener la precipitación en lugares en los que no se tienen registros, tienen una base espacial, es decir, utilizan criterios geográficos como por ejemplo la proximidad entre estaciones (ASCE, 1996; Teegavarapu y Chandramouli, 2005) o estadísticos como ocurre con el Krigeado (Beek *et al.*, 1992; Kyriakidis *et al.*, 2004; Teegavarapu y Chandramouli, 2005) y sus variaciones (Ashraf *et al.*, 1997; Goovaerts, 2000; Teegavarapu, 2007).

Moreno y Roldán (1999) desarrollaron un método de interpolación espacial en el que se

incorpora la consideración de "proximidad" entre estaciones con un sentido climático, es decir, se consideran estaciones cercanas en cuanto a la pluviosidad anual, el número medio de días lluviosos o secos anual, o la precipitación media por día lluvioso.

Pero además, se consideran variables orográficas como la distancia al mar o la elevación sobre el nivel del mar, ya que el clima de la zona de estudio está influenciado por su proximidad al mar y la precipitación está relacionada con la altitud a la que se encuentra la estación meteorológica. Por último, se introduce la posibilidad de considerar en futuros modelos otras variables como el aspecto, la presencia o ausencia de cadenas montañosas, la situación de la estación meteorológica a barlovento o sotavento, o cualquier otra variable a la que se pueda atribuir una influencia en la distribución espacial de la precipitación (Moreno, 1996; Gil, 1998).

En este estudio, se aplica el modelo desarrollado por Moreno y Roldán (1999) y mejorado por Moreno *et al.* (2006), en la interpolación espacial de los parámetros del modelo estocástico de precipitación diaria utilizado para el valle del Guadalquivir (Alcaide, 1986).

MATERIALES Y MÉTODOS

Modelo estocástico de precipitación diaria

El proceso de precipitación considerado es descrito mediante una secuencia de dos variables aleatorias e independientes

$$\{(X_t, Y_t); t = 1, 2, \dots, 365\}$$

donde X_t es una variable discreta que representa el estado del proceso en el día t . Su valor es igual a la unidad si la lluvia es igual o mayor que un umbral T , y cero en caso contrario; Y_t es una variable continua que representa la cantidad de lluvia en el día t , cuando X_t es lluvioso. Con la consideración de umbral para distinguir entre un día seco y uno lluvioso, la variable a usar es $U(t) = Y(t) - T$.

El proceso de ocurrencia de la precipitación es descrito mediante una cadena Markov de segundo orden (el estado del proceso en un día depende del estado de los dos días anteriores) con dos estados (seco y lluvioso), definida por las probabilidades de transición:

$$P_{ijm}(t) = P(X_t = m | X_{t-1} = j, X_{t-2} = i) \quad (1)$$

$$i, j, m = 0, 1; t = 1, 2, \dots, 365$$

Cada matriz $P_{ijm}(t)$ queda definida tan sólo por los parámetros $p_{000}(t), p_{010}(t), p_{100}(t)$ y $p_{110}(t)$, ya que se cumple:

$$p_{ij1}(t) = 1 - p_{ij0}(t) \quad (2)$$

En los casos de climas como el del sur de España, donde un período relativamente seco es seguido, sin transición, por una estación húmeda, es más recomendable el uso de la transformación logarítmica (Woolhiser, 1992; Pérez Lucena, 1994):

$$g_{ijm}(t) = \ln \frac{p_{ijm}(t)}{1 - p_{ijm}(t)} \quad i, j, m = 0, 1 \quad (3)$$

que transforma la probabilidad de transición $p_{ijm}(t)$, acotada entre cero y uno, en $g_{ijm}(t)$, limitada entre más y menos infinito, resolviendo problemas de ajuste de series de Fourier a las variaciones estacionales de los parámetros.

Para describir la cantidad de precipitación en un día lluvioso, Y_t , asumimos que es independiente (es decir, la cantidad de precipitación en un día es independiente de las cantidades recogidas en días anteriores) y se acepta que su distribución depende sólo de X_t y no de X_{t-1} .

Se va a utilizar la distribución mixta exponencial cuya función de densidad queda definida como sigue (Alcaide, 1986):

$$f_t(u) = \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \exp\left(-\frac{u}{\beta(t)}\right) + \frac{1 - \alpha(t)}{\theta(t)} \exp\left(-\frac{u}{\theta(t)}\right) \quad (4)$$

con $u > 0; 0 \leq \alpha(t) \leq 1; 0 < \beta(t) < \theta(t); t = 1, 2, \dots, 365$.

La distribución mixta exponencial puede interpretarse como el resultado de una muestras aleatoria de dos distribuciones exponenciales donde la distribución con la media más pequeña, $\beta(t)$, se muestrea con probabilidad $\alpha(t)$ y la distribución con la media más grande, $\theta(t)$, se muestrea con probabilidad $[1 - \alpha(t)]$.

Cambiando el parámetro $\theta(t)$ por una nueva variable más estable, $\mu(t)$, media de $U(t)$, se mejora el ajuste (Hanson et al., 1989):

$$\mu(t) = \alpha(t)\beta(t) + [1 - \alpha(t)]\theta(t) \quad (5)$$

De esta manera, la distribución mixta exponencial queda definida mediante los parámetros $\alpha(t)$, que se considera constante para todo el año, $\beta(t)$ y $\mu(t)$.

A este modelo de ocurrencia-cantidad de precipitación, se le denomina Cadena de Markov-Mixta Exponencial (CMME).

La variación estacional de los parámetros que determinan el modelo ha sido explicada ajustando series finitas de Fourier a los valores de un período (se han agrupado los días del año en 26 períodos de 14 días cada uno, para asegurar una consistencia estadística, Pérez Lucena, 1994). La serie de Fourier finita en su forma polar sería (Woolhiser y Pegram, 1979):

$$q(n) = \bar{q} + \sum_{i=1}^m c_i \sin\left(\frac{2\pi i n}{365} + \phi_i\right) \quad (6)$$

donde $q(n)$ es el valor del parámetro en el período $n(n = 1, 2, \dots, 26)$; $\bar{q}$ es su media y c_i y ϕ_i son la amplitud y el ángulo de fase del armónico i .

Para describir la distribución mixta exponencial se utiliza el valor medio del parámetro α sin armónicos, $\bar{\alpha}$, en cada estación, adoptando como valor constante de dicho parámetro, $\bar{\alpha}_R$, para toda la zona en estudio la media aritmética de los de todas las estaciones (Woolhiser y Roldán, 1986; Alcaide, 1986; Woolhiser et al., 1988; Moreno y Roldán, 1999). Esto, además de mejorar el ajuste de los parámetros del modelo CMME, simplifica el proceso de interpolación.

Finalmente, el modelo CMME quedará definido por los coeficientes de Fourier que describen la variación estacional de los parámetros $g_{000}(t)$, $g_{010}(t)$, $g_{110}(t)$ y $g_{110}(t)$ para la Cadena de Markov, y $\beta(t)$ y $\mu(t)$ para la distribución Mixta-Exponencial (cada uno de estos parámetros consta de $2m+1$ coeficientes, siendo m el número de armónicos utilizado para cada uno de ellos), más el mencionado valor regionalizado $\bar{\alpha}_R$.

Modelo de estimación de parámetros en puntos sin registro de lluvia

Las técnicas clásicas de interpolación espacial se han basado en la utilización de características geográficas de proximidad para establecer los valores de las variables a interpolar (método de la distancia al cuadrado, kriging o media aritmética, entre otros).

La utilización de procedimientos que no sólo sean espaciales sino que tengan un fundamento climático puede mejorar los resultados (Johnson y Hanson, 1995; Moreno y Roldán, 1999; Teegavarapu y Chandramouli, 2005), por lo que el nuevo método de interpolación propuesto considera estaciones próximas en cuanto a varios aspectos climáticos y orográficos y no sólo en sentido geográfico.

Dicho lo anterior, el método de interpolación propuesto consiste en ponderar las variables climáticas y geográficas previamente elegidas (denominadas *variables de interpolación*), en función a su "proximidad" respecto del valor de dichas variables en el punto en el que se tienen que generar los registros de precipitación diaria.

En una primera fase del método, se ponderará la proximidad entre los valores de las variables de interpolación correspondientes a las estaciones disponibles, y los correspondientes al punto en el que se van a generar los coeficientes del modelo de precipitación CMME. De esta manera, se obtiene una primera estimación de cada uno de los coeficientes para cada una de las variables de interpolación, en el punto sin registros de precipitación diaria (caracterizado con el subíndice u).

La expresión matemática de esta primera fase de la estimación es la siguiente:

$$[C_{ij}]_u^v = \sum_{k=1}^{n_v} \left[\omega_v(k) \left([C_{ij}]_k^v + \frac{\Delta C_{ij}}{\Delta V} (V_u - V_k) \right) \right] \quad (7)$$

$i = 1, \dots, 6; j = 1, \dots, (2m+1); k = 1, \dots, n_v$, donde n_v es el número de estaciones consideradas como cercanas respecto de la variable de

interpolación V ; $[C_{ij}]_u^v$ es el coeficiente j para el parámetro i , obtenido a partir de las n_v estaciones elegidas como próximas con respecto a la variable de interpolación V , para el punto u ; $[C_{ij}]_k^v$ es el coeficiente j para parámetro i de la estación k considerada como próxima con respecto a la variable de interpolación V ; $\Delta C_{ij}/\Delta V$ es la pendiente de la recta de regresión entre cada coeficiente C_{ij} y la variable de interpolación V , para la zona de estudio; $(V_u - V_k)$ es la diferencia entre el valor de la variable de interpolación V en el punto sin registros de lluvia y en la estación próxima k ; $\omega_v(k)$ es el valor de la función de ponderación de la variable de interpolación V para cada estación próxima k . Este se obtiene con la siguiente expresión:

$$\omega_v(k) = \frac{\frac{1}{(V_u - V_k)^2}}{\sum_{k=1}^{n_v} \frac{1}{(V_u - V_k)^2}} \quad \text{siendo} \quad \sum_{k=1}^{n_v} \omega_v(k) = 1 \quad (8)$$

En la segunda fase del método de interpolación se obtienen los coeficientes finales a partir de la ponderación de los estimados en la primera.

La expresión matemática de la fase final de la estimación es la siguiente:

$$[C_{ij}]_u = \sum_{v=1}^{v_c} \left\{ \theta_{c_{ij}}^v [C_{ij}]_u^v \right\} \quad (9)$$

$i = 1, \dots, 6; j = 1, \dots, (2m+1)$

donde v_c es el número de variables de interpolación utilizados en el método de interpolación; $[C_{ij}]_u$ es el valor final del coeficiente j para el parámetro i en el punto sin registros de lluvia diaria; $[C_{ij}]_u^v$ es el coeficiente j para el parámetro i estimado en la primera fase del proceso de interpolación, para la variable de interpolación V ; $\theta_{c_{ij}}^v$ es el valor de la función de ponderación de la variable de interpolación V , para el coeficiente j del parámetro i . Este se obtiene con la siguiente expresión:

$$\theta_{c_{ij}}^v = \frac{\sum_{k=1}^{n_v} \frac{1}{(V_{u,v} - V_{k,v})^2}}{\sum_{v=1}^{v_c} \sum_{k=1}^{n_v} \frac{1}{(V_{u,v} - V_{k,v})^2}} \quad (10)$$

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se dispone de 37 estaciones meteorológicas con registros de 52 años de precipitación diaria (1953-2004) distribuidas por Andalucía (Figura 1).

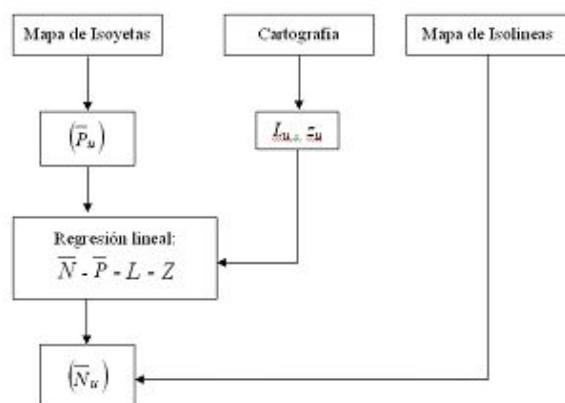


Figura 2. Estimación de $\bar{P}_u$, $\bar{N}_u$, L_u , z_u

Por otro lado, se han obtenido los valores de las variables de interpolación para la estación testigo, como sigue (Figura 2):

- la precipitación media anual se ha obtenido a partir de los mapas de isoyetas de la zona del estudio, existentes en la bibliografía (Gil, 1998).
- el número de días lluviosos medio anual se puede obtener a partir de mapas de isolíneas construidos utilizando los registros de precipitación diaria de las estaciones disponibles o de la regresión lineal entre esta variable de interpolación y el resto de las variables. Para cada zona de estudio, tanto las relaciones como las variables

elegidas, serán diferentes. Para nuestra zona, la relación utilizada es la siguiente:

$$\bar{N}_u = 7,77 + 0,056\bar{P}_u + 0,86L_u - 0,092z_u$$

$$R^2 = 0,86$$

- la distancia al mar (L_u) y la altitud (z_u) se obtienen a partir de la cartografía de la zona.

En la Tabla 2 se muestran dichos valores, para la estación testigo donde $\bar{N}_u$ se ha calculado a partir de la regresión lineal propuesta.

Estación	$\bar{P}_u$ (mm/año)	$\bar{N}_u$ (días/año)	L_u (Km)	z_u (m)
Escacena	745	67	60	417

Tabla 2. Valores de las variables de interpolación, para la estación testigo

Una vez obtenidos, por un lado, los valores de las variables de interpolación tanto para las 7 estaciones disponibles, como para la estación testigo, y, por otro lado, las pendientes de las regresiones lineales entre cada coeficiente del modelo CMME y la variable de interpolación, se aplica el método de interpolación propuesto (Figura 3).

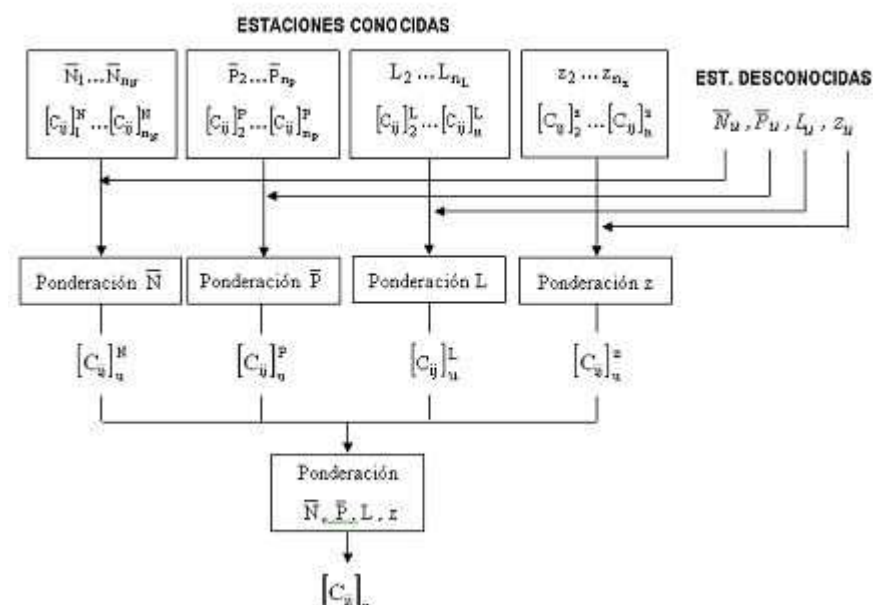


Figura 3. Proceso seguido en el método de interpolación propuesto

Se han elegido un número diferente de estaciones, consideradas como cercanas a efectos del modelo, para cada variable, siendo estos $n_N = 3$, $n_P = 2$, $n_L = 1$ y $n_z = 2$. Estos valores dependen del número de estaciones conocidas disponibles y del valor obtenido de cada variable de interpolación, para la estación desconocida por lo que pueden variar al aplicar el modelo en otras zonas.

Las funciones de ponderación obtenidas para cada variable interpolación, en la segunda fase de la estimación, aparecen en la Tabla 3.

Estación testigo	θ_u^N	θ_u^P	θ_u^L	θ_u^z
Escacena	0,9772	0,0162	0,0038	0,0028

Tabla 3. Valores de función de ponderación para cada variable de interpolación

Como se puede observar, la variable que más influencia tiene en la interpolación es el número medio de días lluviosos. Esto es debido a la buena relación existente entre esta variable y los parámetros de la Cadena de Markov (Hanson *et al.*, 1990). Es evidente que estas funciones de ponderación cambiarán en función de la zona de estudio, pudiéndose encontrar valores de las funciones de ponderación para P más altos para estaciones más alejadas de la costa (Moreno y Roldán, 1999). Los valores de las funciones

de ponderación para L y z , aunque bajos, aumentan considerablemente respecto del modelo desarrollado por Moreno y Roldán (1999), en el que se utilizó como variable geográfica la distancia entre estaciones, y se aplicó a todo el Valle del Guadalquivir.

Por último, se han simulado 1000 series de 52 años de precipitación diaria utilizando, por un lado, los coeficientes interpolados para la estación testigo (denominado como $[C_{ij}]_{\text{interpol}}$), y por otro, los coeficientes generados aplicando el modelo CMME al registro de 52 años de precipitación diaria de dicha estación (denominado como $[C_{ij}]_{\text{CMME}}$).

En la Tabla 4 se muestran los valores de precipitación media anual y número medio de días lluviosos calculado a partir de los coeficientes interpolados ($\bar{P}_{\text{Interpol.sim}}$, $\bar{N}_{\text{Interpol.sim}}$) y los obtenidos a partir de los coeficientes observados ($\bar{P}_{\text{CMME.sim}}$, $\bar{N}_{\text{CMME.sim}}$).

Si se comparan los valores de $\bar{P}$ y $\bar{N}$ observados con los simulados a partir de los coeficientes interpolados (ver Figuras 4 y 5), se encuentran ajustes lineales con un R^2 de 0,84 para la precipitación y de 0,76 para el número medio de días lluviosos. Sin embargo, si comparamos los simulados a partir de los coeficientes interpolados, con los simulados a partir de los coeficientes observados, el ajuste pasa a ser del 0,96 por la precipitación media, y del 0,98 para el número medio de días lluviosos.

$\bar{P}_{\text{obs}}$ (mm)	$\bar{N}_{\text{obs}}$ (días)	$\bar{P}_{\text{CMME.sim}}$ (mm)	$\bar{N}_{\text{CMME.sim}}$ (días)	$\bar{P}_{\text{Interpol.sim}}$ (mm)	$\bar{N}_{\text{Interpol.sim}}$ (días)
798,07	59,71	812,80	53,458	781,59	56,35

Tabla 4. Valores de función de ponderación para cada variable de interpolación

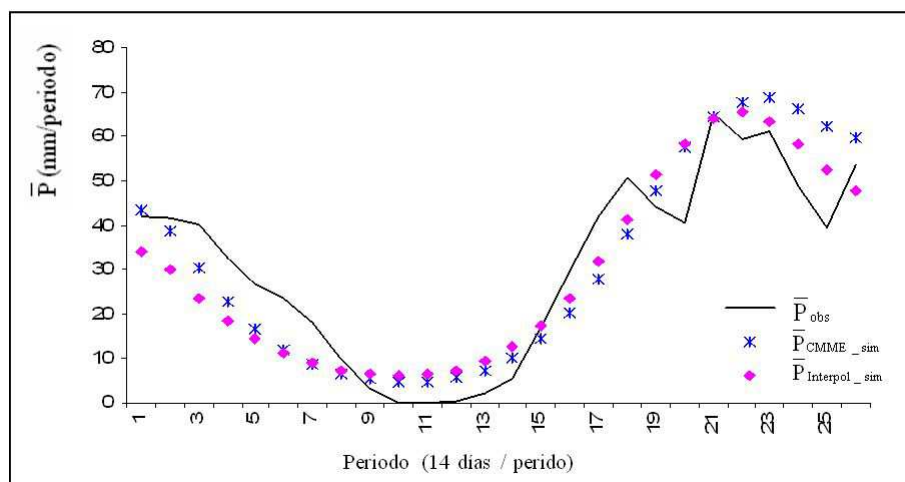


Figura 4. $\bar{P}$ (mm/período) observados y simulados, para la estación testigo

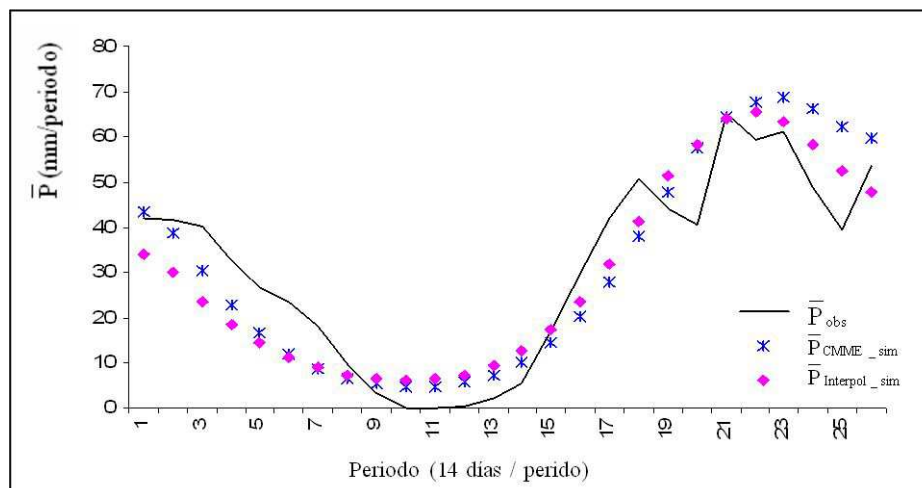


Figura 5. $\bar{N}$ (mm/período) observados y simulados, para la estación testigo

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos, muestran que la estimación de coeficientes de Fourier correspondientes a modelos temporales de precipitación usando variables de fácil cálculo en cualquier ubicación espacial, es un método de interpolación prometedor para la generación de series de lluvia en puntos sin registro disponible.

Estas variables tienen un soporte físico de carácter climático que, sin duda, mejoran notablemente la estimación de los parámetros.

La aplicación en un área que muestra una gradación precipitación-altitud-distancia al mar favorece la consecución de unos resultados más favorables. El reto se presenta ahora de cara a su extrapolación a otras áreas geográficas donde esta relación sea menos significativa o quede enmascarada por otros procesos físicos. En cualquier caso, es requisito previo que la zona de estudio sea climáticamente homogénea.

En este sentido, el método está todavía en desarrollo, ya que como se ha mencionado anteriormente, se pueden incorporar aún nuevas variables de interpolación y nuevas funciones de dichas variables, de cara a su aplicación en otras zonas de Andalucía o de la península Ibérica.

En lo que se refiere al propio modelo estocástico, el uso de dos armónicos para describir los parámetros de la distribución mixta exponencial supone un apreciable mejor ajuste. Ello es así al contar con series que superan los 50 años de datos diarios y dado que las estaciones usadas son complejas desde el punto de vista climático por su situación en zonas montañosas. Cuando no se disponga de suficientes datos, no sería recomen-

dable usar más de un armónico por parámetro. En el caso de la cadena de Markov, no se ha encontrado necesario incrementar el número de armónicos por parámetro.

LISTA DE SÍMBOLOS

- $p_{ijm}(t)$: Probabilidad de transición para $t = 1, 2, \dots, 365$, teniendo en cuenta los dos días anteriores siendo $i, j, m = 0, 1$.
- $g_{ijm}(t)$: Transformación logarítmica para $p_{ijm}(t)$ siendo $i, j, m = 0, 1$.
- $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\theta(t)$ y $\mu(t)$: parámetros que definen la distribución mixta exponencial para $t = 1, 2, \dots, 365$.
- $\bar{\alpha}_R$: Valor del coeficiente $\bar{\alpha}$ para la zona de estudio, calculado como media aritmética de los de todas sus estaciones.
- $[C_{ij}]_u^v$: Coeficiente j para el parámetro i , obtenido a partir de las n_v estaciones elegidas como próximas con respecto a la variable de interpolación V , para el punto sin registro de lluvia diaria.
- $[C_{ij}]_k^v$: Coeficiente j para parámetro i de la estación k considerada como próxima con respecto a la variable de interpolación V .
- $[C_{ij}]_u$: Valor final del coeficiente j para el parámetro i en el punto sin registro de lluvia diaria.
- $\bar{P}$: Precipitación media anual de las estaciones meteorológicas usada en el estudio.
- $\bar{N}$: Número medio de días lluviosos de las estaciones meteorológicas usada en el estudio.
- L : Distancia al mar de las estaciones meteorológicas usada en el estudio.

- z : Altitud sobre el nivel del mar de las estaciones meteorológicas usada en el estudio.
- $\bar{P}_u$: Precipitación media anual estimada para el punto sin registro de lluvia diaria.
- $\bar{N}_u$: Número medio de días lluviosos estimado para el punto sin registro de lluvia diaria.
- L_u : Distancia al mar para el punto sin registro de lluvia diaria.
- z_u : Altitud sobre el nivel del mar para el punto sin registro de lluvia diaria.
- θ_u^N : Función de ponderación para la variable de interpolación $\bar{N}$.
- θ_u^P : Función de ponderación para la variable de interpolación $\bar{P}$.
- θ_u^L : Función de ponderación para la variable de interpolación L .
- θ_u^z : Función de ponderación para la variable de interpolación z .
- $[C_{ij}]_{\text{interpol}}$: Coeficientes interpolados para la estación testigo.
- $[C_{ij}]_{\text{CMME}}$: Coeficientes generados aplicando el modelo CMME al registro de 52 años de precipitación diaria.
- $\bar{P}_{\text{Interpol.sim}}$: precipitación media anual calculada a partir de los coeficientes interpolados.
- $\bar{N}_{\text{Interpol.sim}}$: número medio de días lluviosos calculado a partir de los coeficientes interpolados.
- $\bar{P}_{\text{CMME.sim}}$: precipitación media anual obtenida a partir de los coeficientes observados.
- $\bar{N}_{\text{CMME.sim}}$: número medio de días lluviosos obtenido a partir de los coeficientes observados.

REFERENCIAS

- ASCE, (1999). Hydrology Handbook. American Society of Civil Engineers ASCE, 2a. edición, New York.
- Alcaide, M., (1986). Análisis estacional y regional de la precipitación en el valle del Guadalquivir. Tesis doctoral, Universidad de Córdoba.
- Ashraf, M., J.C. Loftis y K.G. Hubbard, (1997). Application of geostatistics to evaluate partial weather station network. *Agricultural Forest Meteorology*, 84, 255–271.
- Beek, E.G., A. Stein y L.L.F. Janssen, (1992). Spatial variability and interpolation of daily precipitation amount. *Stochastic Hydrol. Hydraul.*, 6, 209–221.
- Buytaert, W.R., R. Céleri, P. Willems, B. De Bièvre y G. Wyseure, (2006). Spatial and temporal rainfall variability in mountain areas: A case study from the south Ecuadorian Andes. *Journal of Hydrology*, 329, 413–421.
- French, M.N., W.F. Krajewski y R.R. Cuykendal, (1992). Rainfall forecasting in space and time using a neural network. *Journal of Hydrology*, 137, 1–37.
- Gil, A., (1998). Regionalización de parámetros de modelos estocásticos de precipitación diaria en zonas montañosas. Trabajo Fin de Carrera, E.T.S.I.A.M., Universidad de Córdoba.
- Goovaerts, P., (2000). Geostatistical approaches for incorporating elevation into the spatial interpolation of rainfall. *Journal of Hydrology*, 228(1), 113–129.
- Hanson, C.L., H.B. Osborn y D.A. Woolhiser, (1989). Daily precipitation simulation model for mountainous areas. *Trans. ASAE*, 32(3), 865–873.
- Johnson, G.L. y C.L. Hanson, (1995). Topographic and atmospheric influences on precipitation variability over a mountain watershed. *Journal of Applied Meteorology*, 34(1), 68–87.
- Kyriakidis, P.C., N. L. Miller y J. Kim, (2004). A spatial time series framework for simulating daily precipitation at regional scales. *Journal of Hydrology*, 297, 236–255.
- Moreno, F., (1996). Regionalización de parámetros de modelos estocásticos de precipitación diaria. Trabajo Fin de Carrera, E.T.S.I. Agrónomos y Montes, Universidad de Córdoba, 120 pp.
- Moreno, F. y J. Roldán, (1999). Regionalization of Daily Precipitation Stochastic Model Parameters. Application to the Guadalquivir Valley in Southern Spain, *Phys. Chem. Earth (B)*, 24, 1–2, pp. 65–71.
- Pérez Lucena, J., (1994). Modelo estocástico de la precipitación diaria. Aplicación a las estaciones de Córdoba y Sevilla. Trabajo Fin de Carrera, E.T.S.I. Agrónomos y de Montes, Universidad de Córdoba, 151 pp.
- Teegavarapu, R.S.V. y V. Chandramouli, (2005). Improved weighting methods, deterministic and stochastic data-driven models for estimation of missing precipitation records. *Journal of Hydrology*, 312, 91–206.

- Teegavarapu, R.S.V., (2007). Use of universal function approximation in variance-dependent surface interpolation method. An application in hydrology. *Journal of Hydrology*, 332, 16–29.
- Woolhiser, D.A. y G.G.S. Pegram, (1979). Maximum likelihood estimation of Fourier coefficients to describe seasonal variations of parameters in stochastic daily precipitation models. *J. Appl. Meteorol.*, 18(1), 34–42.
- Woolhiser, D.A. y J. Roldán, (1986). Stochastic daily precipitation models. 2. A comparison of distribution of amounts. *Water Resour. Res.*, 18(5), 1461–1468.
- Woolhiser, D.A., C.L. Hanson y C.W. Richardson, (1988). Microcomputer program for daily weather simulation U.S.D.A. Agric. Res. Serv., ARS-75, 49 pp.
- Woolhiser, D.A., (1992). Modeling daily precipitation. Progress and problems. En *Statistics in the environmental and earth sciences*, A. Walden y P. Guttorp (eds.), Edward Arnold, Londres, pp. 71–89.