

# LA CRITICALIDAD AUTOORGANIZADA Y EL ANÁLISIS DE DATOS HISTÓRICOS DE LLUVIA EN CÓRDOBA (ANDALUCÍA)

**A. García-Marín**

Departamento de Ingeniería Rural  
Universidad de Córdoba  
amanda.garcia@uco.es

**F. Jiménez-Hornero**

Departamento de Agronomía  
Universidad de Córdoba

**J.L. Ayuso**

Departamento de Ingeniería Rural  
Universidad de Córdoba

**Resumen:** Se analizan en este trabajo datos históricos de lluvia registrados en Córdoba (Andalucía) durante el período 1980-2003, utilizando la teoría de la criticalidad auto-organizada (del inglés self-organized criticality, en adelante SOC). Según esta teoría, la distribución del tamaño de los eventos de lluvia puede describirse mediante una ley potencial. Para el caso analizado esta ley exhibe dos regímenes de escala diferentes. Las distribuciones de las duraciones extremas de los eventos de lluvia y de los períodos secos, también siguen leyes potenciales. La agrupación temporal de la lluvia se analiza mediante la estimación de los factores de Fano y Allan. Todos los resultados obtenidos muestran que la teoría SOC puede utilizarse como una herramienta para describir tanto el fenómeno general de la precipitación en Córdoba, como aspectos más concretos de la misma: tormentas y sequías.

## INTRODUCCIÓN

La criticalidad autoorganizada es un concepto introducido por Bak *et al.* (1987) para explicar el patrón de comportamiento de diversos sistemas o fenómenos complejos existentes en la naturaleza. Estos sistemas complejos evolucionan hacia estados “críticos”, donde pequeñas alteraciones que se producen sin la intervención de ningún agente externo, pueden desencadenar una serie de eventos de cualquier tamaño conocidos como avalanchas. Estas avalanchas se dan a todas las escalas a las que se observa el sistema, lo que determina una de las principales características de los sistemas SOC: la invarianza de escala.

La dinámica de los terremotos ha sido ampliamente descrita mediante la teoría de la criticalidad autoorganizada (e.g. Bak, 1997). Las grietas que se producen en la corteza terrestre se propagan dando lugar a terremotos, donde se libera una gran cantidad de energía. El número de terremotos de una determinada magnitud sigue una distribución conocida como ley

de Gutenberg-Richter. La representación de esta ley en escala doblemente logarítmica es una línea recta. Según esta ley, un terremoto de magnitud 6 es 10 veces más fuerte que uno de magnitud 5, y uno de magnitud 4 diez veces más fuerte que uno de magnitud 3. De la misma forma, cada vez que hay  $10^x$  terremotos de una magnitud  $L$ , hay  $10^{x-1}$  terremotos de una magnitud  $L+1$ . Puede concluirse que los grandes terremotos siguen la misma ley que los pequeños: la dinámica de un sistema complejo, sigue una ley de extremada sencillez.

Por lo tanto, la descripción de los sistemas SOC se puede hacer mediante leyes potenciales, que aparecen como líneas rectas al representarlas en escala doblemente logarítmica. Los exponentes de las leyes potenciales se utilizan para explicar las propiedades estadísticas de sistemas complejos.

Algunos trabajos han demostrado que la teoría SOC puede ser útil a la hora de describir la lluvia (e.g. Andrade *et al.* 1998). Peters y Christiansen (2002) y Peters *et al.* (2002), afirmaron que la

lluvia podría considerarse un sistema SOC, ya que la energía proporcionada lentamente por el sol para la evaporación del agua, se libera repentinamente durante un evento de lluvia. Los mismos autores, al analizar datos de lluvia registrados en una localidad alemana situada a orillas del mar Báltico, comprobaron que tanto la distribución de tamaños de eventos de precipitación, como la duración de los mismos, seguían leyes potenciales.

Los sistemas críticamente autoorganizados alcanzan su estado estable mediante fluctuaciones temporales de sus eventos, caracterizados por la energía que liberan. Para detectar la presencia de agrupación de dichos eventos en la serie temporal, se pueden utilizar entre otros, los factores de Fano y de Allan. Según autores como Telesca *et al.* (2004), dichos factores pueden usarse como estadísticos que caracterizan a sistemas formados por secuencias de eventos que son el resultado de un proceso puntual definido por el conjunto de sus tiempos de ocurrencia. Los factores de Fano y Allan son también estimadores del exponente fractal del espectro de potencia, por lo que también pueden usarse como indicadores del grado de multifractalidad de un proceso.

El principal objetivo de este trabajo es comprobar si se puede utilizar la teoría SOC para describir el tamaño y la duración de eventos de lluvia, así como la duración de los períodos sin lluvia, en una región semiárida como Córdoba (Andalucía).

## MÉTODOS

Siguiendo la estructura propuesta por Peters y Christensen (2002), un evento de lluvia se puede definir como una secuencia de cantidades de lluvia,  $q(t)$ , no nulas, y su tamaño se calcula según la expresión:

$$M = \sum_{t_{0i}}^{t_{fi}} p(t) \Delta t \quad (1)$$

donde  $\Delta t$  es 1 hora en este trabajo, ya que se analizan datos horarios de precipitación. Los intervalos sin lluvia se consideran eventos secos.

Formalmente una ley potencial implica que una cierta cantidad  $R$  puede expresarse como potencia de otra cantidad  $s$ :

$$R(s) \propto s^{-\tau} \quad (2)$$

Según la teoría de la criticalidad autoorganizada, si una serie de datos se ajusta a una ley

potencial, esto implica que no existe una escala típica que describa los eventos representados. Esta característica se conoce como invariancia de escala.

Según Andrade *et al.* (1998), para analizar  $R(s)$  es conveniente utilizar la función de distribución acumulada  $N(s)$ :

$$N(s) = \frac{\bar{R}(s)}{s} \propto \frac{1}{\tau - 1} s^{-\tau} \left[ 1 - \left( \frac{s}{Max} \right)^{\tau-1} \right] \quad (3)$$

donde  $Max$  es el evento máximo en la serie de datos analizada. La única condición de la teoría SOC es que la serie de datos pueda ajustarse a la ec.(3).

Si la secuencia de eventos de lluvia se supone como la realización de un proceso puntual, los estadísticos  $FF(t)$ , Factor de Fano, y  $AF(t)$ , Factor de Allan, son muy útiles para caracterizar dicho proceso. Para calcularlos hay que contabilizar el número de eventos de lluvia en cada intervalo  $z$  de longitud  $E_z(t)$ , en los que se divida el eje de tiempos, así como su valor esperado  $\langle E_z(t) \rangle$ :

$$FF(t) = \frac{\langle E_z^2(t) \rangle - \langle E_z(t) \rangle^2}{\langle E_z(t) \rangle} \quad (4)$$

$$AF(t) = 2FF(t) - FF(2t) \quad (5)$$

El factor de Fano para un proceso fractal y un tiempo  $t$  elevado, se puede expresar también según (Lowen y Teich 1995):

$$FF(t) = 1 + \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\alpha_{FF}} \quad (6)$$

para  $0 < \alpha_{FF} < 1$ , y siendo  $t_0$  el tiempo que determina el límite inferior a partir del cual se detecta la invarianza de escala. El valor de  $\alpha_{FF}$  equivale al exponente fractal  $\alpha$  de procesos definidos por la ley potencial  $S(f) \propto f^{-\alpha}$ , siendo  $f$  la frecuencia con la que ocurren (e.g. Lowen y Teich, 1995; Lowen *et al.*, 2001). El factor de Fano no es útil para estimar exponentes mayores que la unidad. En ese caso es recomendable usar el factor de Allan, que puede expresarse también de la forma:

$$AF(t) = 1 + \left( \frac{t}{t_1} \right)^{\alpha_{AF}} \quad (7)$$

siendo  $t_1$  definido de la misma forma que  $t_0$ .

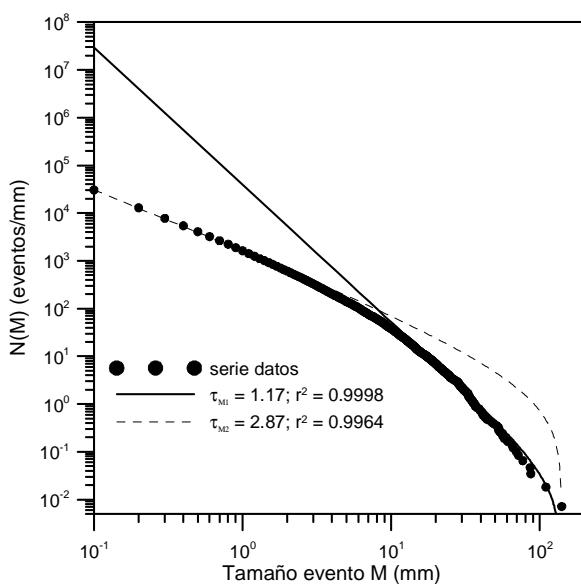
## DATOS

En este trabajo se analizan los datos horarios de precipitación registrados en la estación meteorológica de Córdoba Aeropuerto desde 1980 hasta 2003. La altitud de la estación es de 117 m

y el clima del área en la que se encuentra emplazada se define como subcontinental semihúmedo, con veranos secos y calurosos e inviernos húmedos y fríos (Estudio agrobiológico de la provincia de Córdoba, 1971). La precipitación media anual es de 600 mm y se caracteriza por ser de tipo frontal de octubre a mayo y convectiva desde finales de verano a principios de otoño, siendo inapreciable en julio.

## RESULTADOS

La Figura 1 muestra la representación del número de eventos de lluvia de una determinada cantidad  $N(M)$  frente al tamaño del evento  $M$ . La función de distribución (3) se ajusta tanto para los eventos pequeños como para los de tamaño elevado, con exponentes  $\tau_{M1} = 1,17$  y  $\tau_{M2} = 2,87$ , respectivamente. Este comportamiento bimodal de escala fue también detectado por Andrade *et al.* (1998) al usar la teoría SOC para analizar datos de lluvia en diferentes áreas del mundo. Según los mismos autores, se puede extraer cierta información del cociente  $\sigma = \tau_{M2}/\tau_{M1}$  sobre la relación entre la lluvia de tipo convectivo y frontal en un lugar concreto. En nuestro caso  $\sigma = 2,45$ , lo que concuerda con los valores de  $\sigma \approx 2 - 3$  encontrados por Andrade *et al.* (1998) para zonas europeas donde la precipitación de tipo convectivo es frecuente en verano y a principios de otoño.

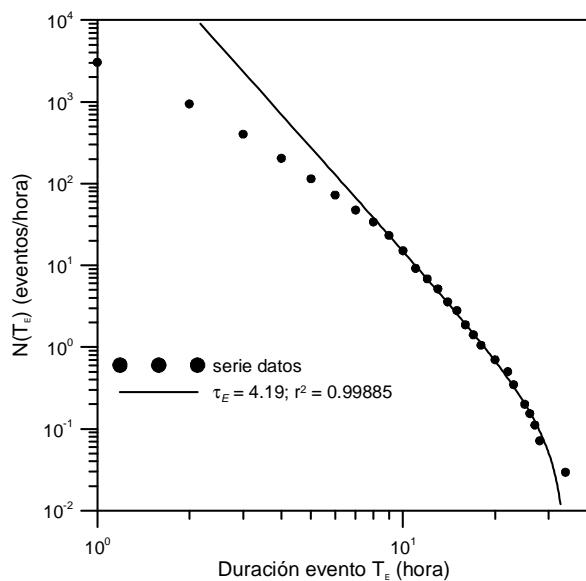


**Figura 1.** Número de eventos de lluvia  $N(M)$  frente a su tamaño  $M$

El valor obtenido para  $\tau_{M2}$  al ajustar los eventos de lluvia extremos, es superior a 2. Este he-

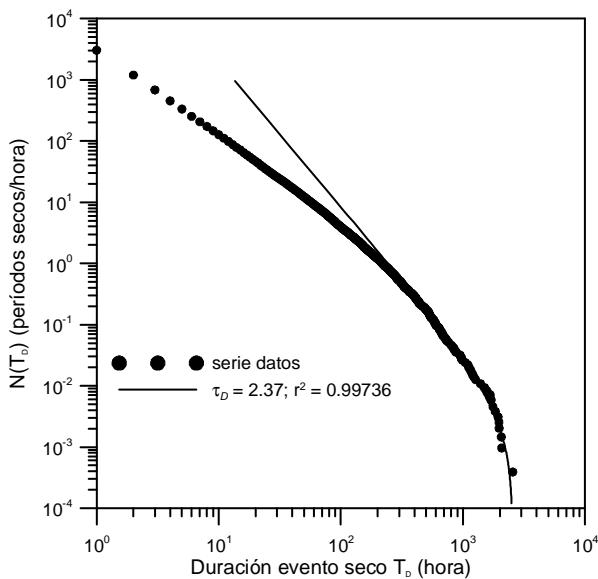
cho sugiere que para describir el comportamiento de la lluvia horaria en Córdoba es necesario un modelo multifractal (e.g. Lovejoy y Mandelbrot, 1985; Tessier *et al.*, 1996), frente a un modelo monofractal que requeriría  $\tau_{M2} < 2$ . Este resultado puede también tomarse como base a la hora de realizar futuros estudios, como el análisis del comportamiento de datos de lluvia de diferente resolución temporal (por ejemplo, a escala diaria), o para validar un modelo que genere datos sintéticos de lluvia. En el primero de los casos, si la multifractalidad y la criticalidad autoorganizada son características del proceso de la precipitación, deben estar presentes con independencia de la escala de los datos analizados. En el caso del modelo de lluvia, los datos generados deberán reproducir también dichas características.

En la Figura 2, al representar la relación del número de eventos de lluvia  $N(T_E)$  frente a su duración  $T_E$  mediante la ec.(3), se observa un único régimen de escala para valores de  $T_E$  comprendidos entre 9 y 34 horas, con un valor  $\tau_E = 4,19(r^2 = 0,99885)$ . Todos los eventos de lluvia de duraciones comprendidas dentro de este intervalo de valores pueden considerarse similares desde el punto de vista del mecanismo que los desencadena. Para las duraciones más cortas estaríamos hablando de eventos básicamente de tipo convectivo, mientras que las mayores duraciones corresponderían a eventos de tipo frontal, si bien hay que resaltar que la duración no es un factor suficiente a la hora de discriminar ambas tipologías.



**Figura 2.** Número de eventos de lluvia  $N(T_E)$  frente a su duración  $T_E$

El número de períodos sin lluvia  $N(T_D)$  frente a su duración  $T_D$  se muestra en la Figura 3. Nuevamente se observa un único régimen de escala con  $\tau_D = 2,37 (r^2 = 0,99736)$ , para un intervalo de valores de  $T_D$  que oscilan entre 400 y 2500 horas. Se comprueba por lo tanto, que los períodos secos en la localidad analizada no tienen una única duración característica, sino que varían en función de la época del año. Así, las mayores duraciones caracterizan la época más seca, coincidente con el verano. Sin embargo, el resto de períodos serían representativos del resto de estaciones, desde las más húmedas y por lo tanto con duraciones de intervalos secos más pequeñas (primavera y otoño), hasta las de menos precipitación (invierno). Andrade *et al.* (1998) encontraron resultados similares para los datos de precipitación de zonas semiáridas considerados en su estudio. Los valores mínimos para  $T_E$  y  $T_D$  en las Figuras 2 y 3, son similares a los detectados por Veneziano y Iacobellis (2002).

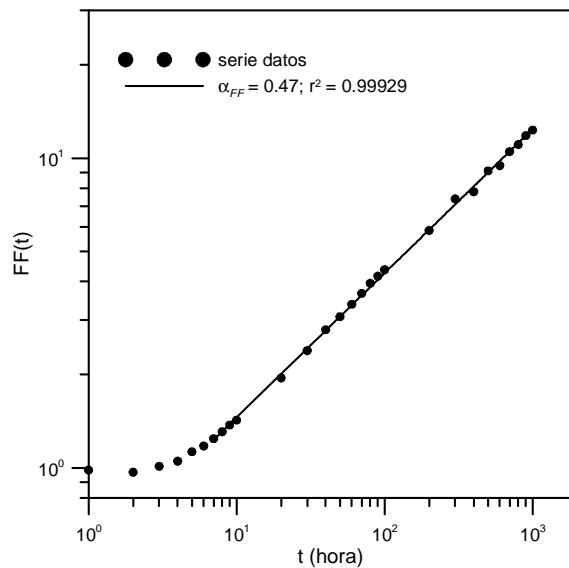


**Figura 3.** Número de eventos sin lluvia  $N(T_D)$  frente a su duración  $T_D$

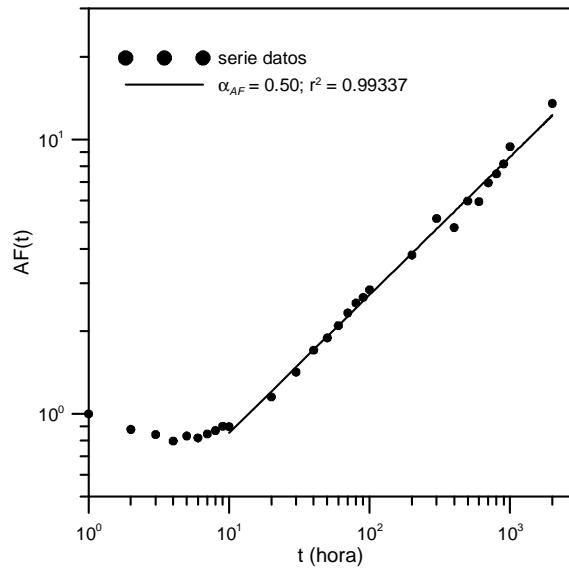
Los resultados obtenidos al calcular los factores de Fano y Allan se muestran en las Figuras 4 y 5. Los exponentes  $\alpha_{FF} = 0,47$  y  $\alpha_{AF} = 0,50$ , permiten estimar el exponente fractal. Dichos exponentes son mayores que cero en el intervalo de tiempo en el que la invarianza de escala es detectada, evidenciando de esta forma la presencia de agrupación temporal en el proceso de la lluvia.

Al mismo tiempo, los exponentes mencionados anteriormente tienen valores inferiores a uno

y similares a los obtenidos por diversos autores al realizar análisis multifractal de la precipitación utilizando el método del espectro de potencia (e.g. Ladoy *et al.*, 1993; Fraedrich y Lardner, 1993; Svensson *et al.*, 1996; Tessier *et al.*, 1996).



**Figura 4.** Análisis del factor de Fano para la serie horaria de precipitaciones



**Figura 5.** Análisis del factor de Allan para la serie horaria de precipitaciones

## CONCLUSIONES

Del estudio realizado utilizando datos de lluvia horaria de 23 años de duración en Córdoba, se puede concluir que la teoría de la criticalidad autoorganizada es válida para describir la precipitación en esta zona semiárida.

Los ajustes a leyes potenciales obtenidos al analizar el tamaño de los eventos de lluvia, la duración de los mismos y la duración de los períodos secos, cumplen con los requisitos de la citada teoría y son similares a los resultados obtenidos por Andrade *et al.* (1998). La distribución del tamaño de los eventos de lluvia proporciona dos ajustes diferentes caracterizados por exponentes cuyo cociente es similar al ya obtenido para otras zonas de Europa. La información obtenida de la distribución de las duraciones tanto de los eventos de lluvia como de los períodos secos, permite caracterizar por un lado la precipitación desde el punto de vista del mecanismo predominante, y por otro, determinar la duración de los períodos más secos en la localidad analizada.

Igualmente, el análisis realizado mediante los factores de Fano y Allan, sugiere la presencia de agrupación temporal en el proceso de la lluvia y la naturaleza multifractal de la misma, características que pueden relacionarse con la criticalidad autoorganizada de un proceso. Por todos estos resultados, puede concluirse que la teoría de la criticalidad autoorganizada puede utilizarse para describir la dinámica de la precipitación horaria en Córdoba, así como para trabajos futuros relacionados con la obtención de datos de lluvia sintéticos o con la elección de la resolución temporal de los datos de lluvia más adecuada para describir el proceso de la precipitación en una localidad.

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $AF(t)$ : estadístico factor de Allan para detectar agrupación de datos en series temporales;
- $E_z(t)$ : número de eventos de lluvia en cada intervalo de  $z$  de longitud  $t$  en los que se divide el eje de tiempos;
- $\langle E_z(t) \rangle$ : valor esperado de  $E_z(t)$ ;
- $f$ : frecuencia de ocurrencia de un proceso;
- $FF(t)$ : estadístico factor de Fano para detectar agrupación de datos en series temporales;
- $N(M)$ : número de eventos de lluvia de un determinado tamaño  $M$ ;
- $N(s)$ : función de distribución acumulada de la variable  $s$ ;
- $N(T_D)$ : número de eventos secos;
- $N(T_E)$ : número de eventos de lluvia de una duración determinada;
- $M$ : Tamaño del evento de lluvia, mm;

$Max$ : evento máximo de la serie de datos analizada;

$q(t)$ : cantidad no nula de lluvia en una unidad de tiempo, mm;

$t_0$ : tiempo que determina el límite inferior a partir del cual se detecta invarianza de escala con el factor de Fano,  $h$ ;

$t_1$ : tiempo que determina el límite inferior a partir del cual se detecta invarianza de escala con el factor de Allan,  $h$ ;

$T_D$ : duración de los eventos o períodos secos

$T_E$ : duración de un evento de lluvia,  $h$ ;

$\tau$ : exponente de una ley potencial;

$\alpha$ : exponente fractal;

$\sigma$ : relación entre los exponentes  $\tau_{M2}$  y  $\tau_{M1}$ ;

$\alpha_{AF}$ : exponente de Fano;

$\alpha_{FF}$ : exponente de Fano;

$\tau_{M1}, \tau_{M2}, \tau_E, \tau_D$ : exponentes de ajuste del número de eventos, duración de eventos y duración de períodos secos, a la función  $N(s)$ ;

$\Delta t$ : intervalo de tiempo considerado,  $h$ .

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto de Investigación AGL2002-03400, financiado por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnología (CICYT). F.J. Jiménez-Hornero está contratado con cargo a las Ayudas para facilitar el Retorno de Investigadores a Centros de Investigación y Universidades de Andalucía (Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa, Junta de Andalucía).

## REFERENCIAS

- Andrade, R.F.S., H.J. Schellnhuber y M. Clausen, (1998). Analysis of rainfall records: possible relation to self-organized criticality. *Physica*, A 254, 557–568.
- Bak, P., C. Tang y K. Wiesenfeld, (1987). Self-organized criticality: an explanation of 1/f noise. *Physical Review Letters*, 59(4), 381–384.
- Bak, P., (1997). *How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality*. Springer-Verlag, New York.
- C.E.B.A.C., (1971). Estudio agrobiológico de la provincia de Córdoba. C.S.I.C., Madrid.

- Fraedrich, K. y C. Larnder, (1993). Scaling regimes of composite rainfall time series. *Tellus* 45A, 289–298.
- Ladouy, P., F. Schmitt, D. Schertzer y S. Lovejoy, (1993). Variabilité temporelle multifractale des observations pluviométriques à Nîmes. *3 Comptes Rendues Acad. des Sciences*, 17, 775–782.
- Lovejoy, S. y Mandelbrot, B., (1985). Fractal properties of rain and a fractal model. *Tellus*, 37A, 209–232.
- Lowen, S.B. y M.C. Teich, (1995). Estimation and simulation of fractal stochastic point processes. *Fractals*, 3, 183–210.
- Lowen, S.B., T. Ozaki, E. Kaplan, B.E.A. Saleh y M.C. Teich, (2001). Fractal features of dark, maintained, and driven neural discharges in the cat visual system. *Methods*, 24, 377–394.
- Peters, O. y K. Christiansen, (2002). Rain: relaxations in the sky. *Phys. Rev.*, E 66, 036120.
- Peters, O., C. Hertlein y K. Christiansen, (2002). A complexity view of rainfall. *Phys. Rev. Lett.*, 88, 018701.
- Svensson, C., J. Olsson y R. Berndtsson, (1996). Multifractal properties of daily rainfall in two different climates. *Water Resour. Res.*, 32, 2463–2472.
- Telesca, L., G. Colangelo, V. Lapenna y M. Macchiato, (2004). On the scaling behavior of rain event sequence recorded in Basilicata region (Southern Italy). *Journal of Hydrology*, 296, 234–240.
- Tessier I., S. Lovejoy, P. Hubert, D. Schertzer y S. Pecknold, (1996). Multifractal analysis and modelling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. *J. Geophys. Res.*, 101, 26427–26440.
- Veneziano, D. y Iacobellis, V., (2002). Multiscaling pulse representation of temporal rainfall. *Water Resour. Res.*, 38, 1138, doi:10.1029/2001WR000522.