

# ***Estudio hidrodinámico de vertederos y rápidas escalonadas con modelo numérico tridimensional SPH.***

## ***Proyecto ALIVESCA***

*David López, Miguel de Blas,*

*Roberto Marivela, Juan José Rebollo, Rubén Díaz.*

*Centro de Estudios Hidrográficos (CEDEX)*

[david.lopez@cedex.es](mailto:david.lopez@cedex.es), [miguel.blas@cedex.es](mailto:miguel.blas@cedex.es), [rioberto.marivela@cedex.es](mailto:rioberto.marivela@cedex.es)

*Martí Sánchez –Juny, Soledad Estrella*

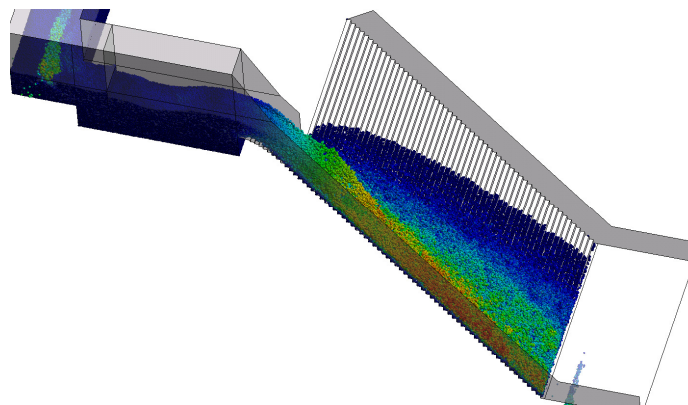
*Universidad Politécnica de Cataluña (UPC)*

[soledad.estrella@upc.edu](mailto:soledad.estrella@upc.edu) , [marti.sanchez@upc.edu](mailto:marti.sanchez@upc.edu)

## **1 Introducción**

El proyecto ALIVESCA estudia el efecto de suprimir los cajeros de acompañamiento en la rápida de un aliviadero escalonado. En este proyecto colaboran la UPC, DRAGADOS. SA, y el CEDEX. Dentro de los trabajos de este proyecto, el CEDEX participa en la modelación numérica 3D, mediante el método SPH “Smoothed Particles Hydrodynamic”, de la rápida escalonada construida en el Laboratorio de Hidráulica de la Escuela de Caminos de la UPC. A pesar de que este fenómeno hidráulico está gobernado por las ecuaciones de flujo bifásico aire-agua, se ha querido abordar este estudio con el modelo SPH para flujo monofásico, con una doble finalidad, por un lado, calibrar el modelo numérico, y por otro, complementar el análisis hidrodinámico realizado en el modelo físico.

La primera fase de los trabajos realizados con simulación numérica SPH se ha realizado sobre un modelo de dimensiones 10 veces más grande que el modelo físico asumiendo una semejanza de Froude entre modelo numérico y modelo físico. Sobre este modelo se han realizado una serie de ensayos cualitativos con el fin de aproximar el problema y estudiar los posibles efectos de escala.



*Figura 1. Modelo a escala 10:1 del modelo físico.*

La experimentación realizada sobre el modelo a escala 10:1, ha puesto de manifiesto una serie de carencias que se han modificado en un nuevo para mejorar su representatividad. Se ha adoptado la escala del prototipo (15:1), y se ha centrado el estudio en la parte superior del vertedero y primer tramo de escalones sin cajero de acompañamiento.

Se presentan a continuación el resultado de los ensayos realizados sobre ambos modelos SPH así como la validación realizada con datos del modelo físico.

## 2 Modelo Numérico SPH

El método de Hidrodinámica de Partículas Suavizadas (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH) es un método de partículas dentro de los denominados métodos sin malla. Se caracteriza, en primer lugar, por la discretización Lagrangiana del medio continuo, mediante un conjunto de partículas ó parcelas de fluido y, en segundo lugar, por la reducción del problema al estudio de la interacción entre las mismas. Esto se hace mediante un esquema de promediado que, partiendo de los valores puntuales correspondientes, permite obtener los valores de campo continuo de las variables de interés (presión, densidad, velocidad o posición, entre otras).

Para llevar a cabo estos trabajos se ha empleado el software MDST (Grassa, 2004). Este modelo desarrollado en el CEDEX, basado en el método SPH, resuelve las ecuaciones de Navier Stokes, considerando el agua como un fluido cuasi-incompresible, lo que permite integrar las ecuaciones con un esquema temporal explícito, resolviendo una ecuación de estado (Monaghan, 2005). Las ecuaciones (1) y (2) presentan la formulación discreta de las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación (3) la ecuación de estado.

$$\frac{d\rho_a}{dt} = \sum_b m_b (v_a - v_b) \cdot \nabla W_{ab} \quad (1)$$

$$\frac{dv_a}{dt} = -\sum_b m_b \left( \frac{p_b}{\rho_b^2} + \frac{p_a}{\rho_a^2} + \Pi_{ab} \right) \nabla_a W_{ab} + g \quad (2)$$

$$p_i = \frac{\rho_0 c_s^2}{\gamma} \left( \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (3)$$

En la ecuación (3)  $c_s$  representa la velocidad del sonido en el medio y  $\rho_0$  una densidad de referencia; se toma habitualmente  $\gamma = 7$  lo que da lugar a una dependencia muy rígida de la presión con la densidad. Para la simulaciones de ALIVESCA la máxima velocidad previsible en el flujo es de 30 m/s se ha adoptado una velocidad del sonido  $c=300$  m/s lo que garantiza una compresibilidad del fluido inferior al 1% y permite adoptar mayores pasos de tiempo satisfaciendo la condición de convergencia de Courant. (Monaghan, 1992).

En la ecuación de la dinámica (2) aparece el término  $\pi_{ab}$  que representa las fuerzas viscosas. Existen diferentes formulaciones de cierre turbulento. En el modelo MDST se han implementado el modelo de viscosidad artificial de Monaghan, el modelo K-E y el modelo Alfa-vor (López, 2010). El empleo de modelos de turbulencia complejos permiten obtener resultados mejores, pero dado el tamaño del problema abordado, el coste computacional resultaría excesivo por lo que, para este estudio, se ha utilizado el modelo de Monaghan:

$$\Pi_{ab} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ab} \mu_{ab} + \beta \mu_{ab}^2}{\bar{\rho}_{ab}}, & v_{ab} \cdot r_{ab} < 0 \\ 0, & v_{ab} \cdot r_{ab} > 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\mu_{ab} = \frac{h v_{ab} \cdot r_{ab}}{r_{ab}^2 + (0.1h)^2} \quad (5)$$

Con  $\alpha = 0.01$  y  $\beta = 0$ , que son valores habituales en flujos en superficie libre.

El contorno tiene la misión de contener el fluido evitando que este lo traspase. Para ello es necesario ejercer sobre las partículas que tratan de atravesarlo una fuerza que lo impidan. Monaghan (1994), propone modelizar la fuerza de acuerdo con el esquema Lennard – Jones empleado para evaluar fuerzas entre moléculas (Lennard – Jones, 1924). Consiste en materializar el contorno mediante partículas que ejercen, sobre las partículas de fluido que se aproximan, una fuerza inversamente proporcional a la distancia. Dado un contorno y una partícula situada a una distancia  $r < r_0$  de él, la fuerza radial producida por unidad de masa es la siguiente:

$$f(\mathbf{r}) = d_0 \left( \left( \frac{r_0}{r} \right)^{p_1} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{p_2} \right) \frac{\mathbf{r}}{r^2} \quad (10)$$

siendo nula para distancias mayores, de forma que la fuerza sea siempre repulsiva. La constante  $d_0$  tiene dimensiones de velocidad al cuadrado; algunas referencias toman valores proporcionales a  $gH$ , donde  $H$  es la

profundidad y  $g$  la aceleración de la gravedad. El coeficiente  $p_1$  debe ser mayor que  $p_2$ . Habitualmente se adoptan los valores  $p_1 = 4$  y  $p_2 = 2$ . Finalmente  $r_0$  toma el valor del espaciamiento inicial entre las partículas. La fuerza es simétrica, por lo que se da un comportamiento elástico no amortiguado frente a un impacto con un contorno.

Para poder realizar estudios con un número de partículas elevado, el CEDEX ha abordado en materia de supercomputación el desarrollo de una nueva versión del código en arquitectura paralela con paradigma MPI (Grassa, 2007) que ha permitido realizar simulaciones tridimensionales como la que se aborda en este trabajo.

El Laboratorio de Hidráulica del CEH-CEDEX lleva unos años trabajando en la validación del método para su aplicación a estudios hidrodinámicos en estructuras hidráulicas con resultados esperanzadores. (López, 2010)

### 3 La experimentación numérica.

#### 3.1 Modelo numérico a escala 10:1 del modelo físico.

La primera fase de los trabajos realizados con simulación numérica SPH se ha realizado sobre un modelo de dimensiones 10 veces más grande que el modelo físico asumiendo una semejanza de Froude entre modelo numérico y modelo físico. Esto permite satisfacer la condición de Courant con incrementos de tiempo más grandes. En este modelo se han reproducido la totalidad de los 60 escalones del modelo físico y se ha analizado el caso vertedero de 0.5 m de ancho en dimensiones de modelo (7.5 m en prototipo), materializado por un cajero de guiado paralelo al cajero derecho de la rápida (que hace las veces de eje de simetría) y que llega hasta el escalón 10. Para el diseño del contorno se ha partido de los planos del modelo físico, aunque ha sido necesario limitar el volumen del depósito para reducir el coste computacional.

En este modelo los escalones resultan de 0.64 m de huella y 0.80 m de contrahuella. Para materializar los contornos se han empleado partículas fijas espaciadas 0.07 cm con la misión de evitar el paso del fluido a través del contorno. Para ello se han empleado 1.600.000 partículas. Sobre este modelo se han realizado una serie de ensayos cualitativos con el fin de aproximar el problema y estudiar los posibles efectos de escala.

El número total de partículas de fluido que se emplea en cada simulación, depende del caudal que se pretende que circule por el modelo. Para esto es necesario realizar unos primeros ensayos de prueba y error hasta que se puede establecer la relación entre número de partículas y caudal circulante. Para homogeneizar y facilitar el análisis de los resultados, todos los valores de las variables de estudio se expresarán en dimensiones del prototipo, es decir, a escala 15:1 del modelo físico.

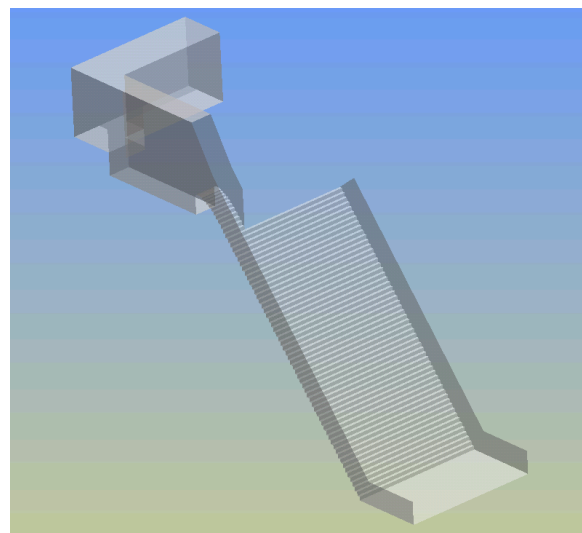


Figura 2. Geometría del contorno del Modelo a escala 10:1 del modelo físico

La figura 3 muestra el funcionamiento de la rápida escalonada con 850.000 partículas de fluido que, una vez establecida la recirculación de las partículas, reproducen un flujo que se estabilizó en un caudal de  $18.6 \text{ m}^3/\text{s}$  y por metro de ancho de vertedero. La imagen permite apreciar que el diseño de la alimentación del flujo es algo corta y requeriría alguna mejora en la tranquilización del flujo antes de llegar al vertedero. Se observa en la figura que se forma la recirculación característica en los escalones y que se produce una expansión lateral del flujo por el lado sin guiado.

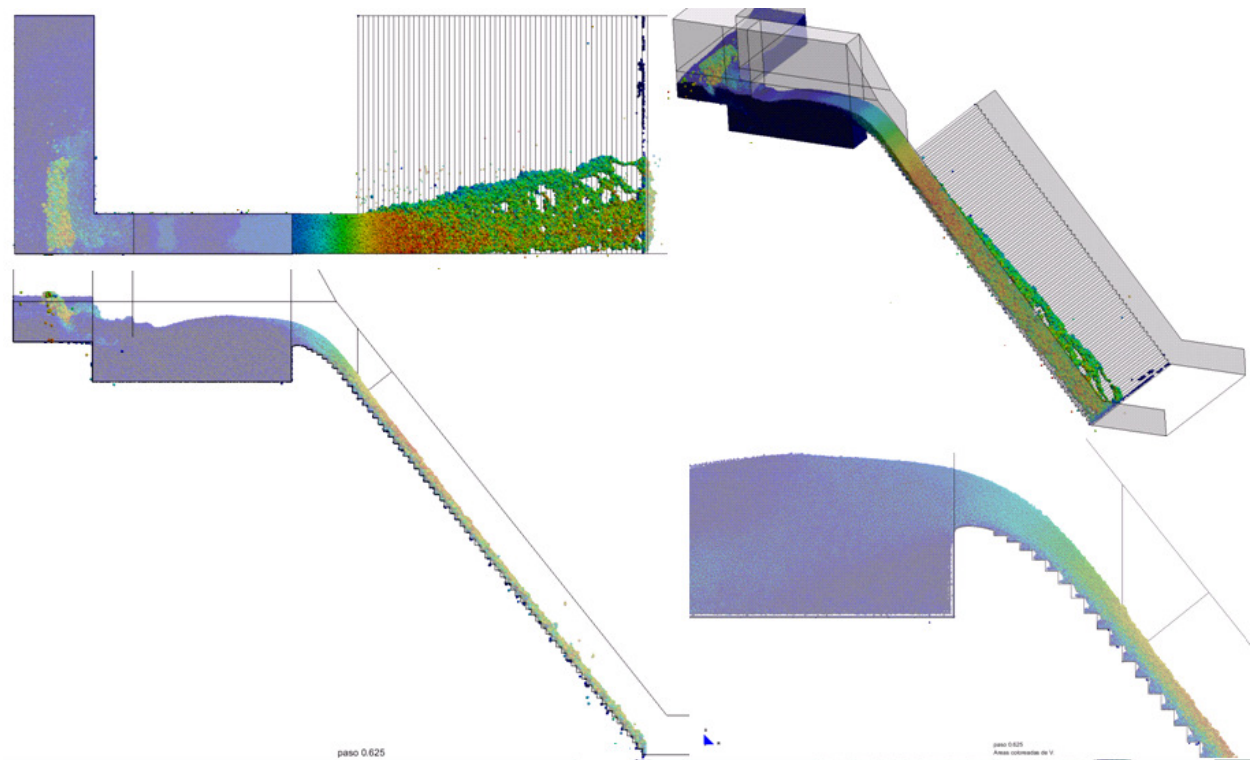


Fig.3 Modelo SPH. Escala 10:1 del modelo. Caudal: 18.6 m<sup>3</sup>/s y por metro de ancho de vertedero en valores de prototipo (15:1).

La comparación visual con el modelo físico permitió comprobar que la expansión lateral del modelo numérico es bastante menor que la que se produce en el modelo físico, por lo que el trabajo realizado en este modelo se ha centrado en determinar las causas de esta discrepancia. Si analizamos el fenómeno físico, podemos encontrar algunas. Al eliminar la reacción del cajero, se produce una expansión lateral del flujo hasta que las fuerzas estabilizantes (peso del agua, rozamiento con el contorno) sean capaces equilibrar el empuje lateral del agua debido a las fuerzas de presión y también a una parte de las fuerzas de inercia.

El hecho de no tener en cuenta el flujo bifásico explica que existan ciertas discrepancias en la expansión lateral, pero parece que deben existir otras razones preponderantes en esta discrepancia.

También debe analizarse el efecto de escala, es decir, si el tamaño de las partículas permite reproducir correctamente la expansión lateral del flujo. La experimentación en modelo físico muestra funcionamientos claramente diferenciados del flujo a lo ancho de la rápida. En la zona que no queda afectado por la expansión lateral del flujo se aprecia un funcionamiento de flujo rasante, que se va transformando gradualmente en un flujo escalón a escalón a medida que nos trasladamos a la zona de expansión. En esta zona los niveles de agua en el escalón son bastante reducidos del orden 2 o 3 cm de modelo físico. Esto supone un calado de 20 a 30 cm que no pueden ser correctamente simulados con partículas de 15 cm.

También se ha analizado el efecto de la rugosidad del contorno. En ensayos de calibración realizados sobre un canal de calibración se ha comprobado que el método de las Fuerzas de Lennard-Jones no es capaz de reproducir correctamente la fricción con los contornos (Marivela y López, 2011). Estas fuerzas las ejercen las partículas de contornos sobre las partículas de fluido que tratan de atravesarlo y tienen un valor proporcional a la distancia. (Ecuación 10). Una vez superado el transitorio inicial en el que las partículas de contorno detectan el fluido y lo retienen dentro del recinto que materializan las partículas de contorno, el flujo toma una inercia paralela al contorno y las fuerzas del contorno dejan de tener influencia sobre el movimiento. Una forma de conseguir que la componente de estas fuerzas se opongan al movimiento y produzcan una resistencia al flujo, es disponiendo unas sobre-elevaciones isoespaciadas de las partículas del contorno, respecto al plano general del contorno. Para caracterizar la sobre-elevación se ha tomado como referencia la longitud de suavizado  $h$ . Las figuras 4.1 y 4.2 muestran dos disposiciones de partículas de contorno ensayadas. Las figuras 5.1 y 5.2 muestran la expansión lateral del flujo con las diferentes rugosidades de contorno para un caudal unitario de prototipo de 23.2 m<sup>3</sup>/s.

Además se ha observado que esto puede tener cierta influencia en la expansión lateral del flujo en la rápida escalonada, aunque no tanto como para alcanzar las expansiones laterales del modelo físico.

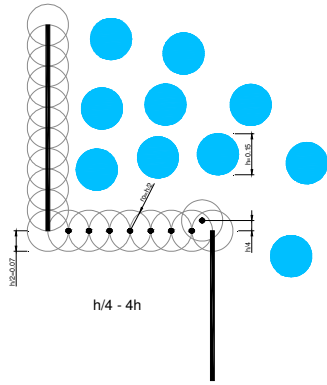


Fig.4.1. Esquema rugosidad  $h/4-4h$ .

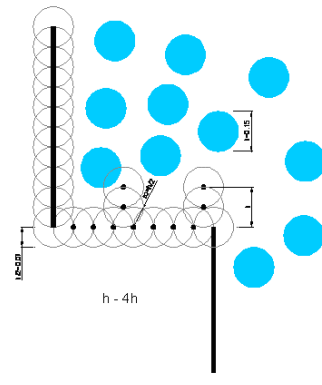


Fig.4.2. Esquema rugosidad  $h-4h$ .

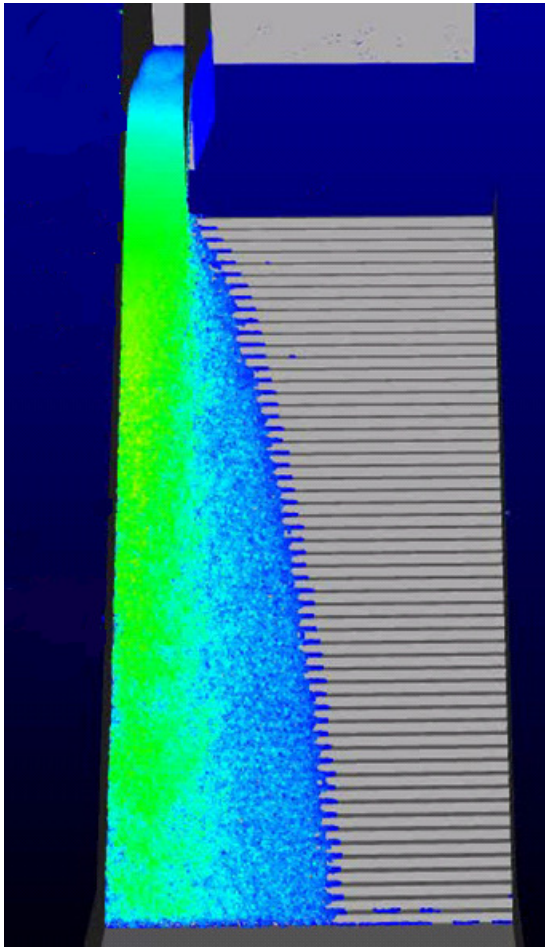


Fig.5.1  $q_{prot} = 23.2 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ . Rugosidad  $h/4-4h$ .

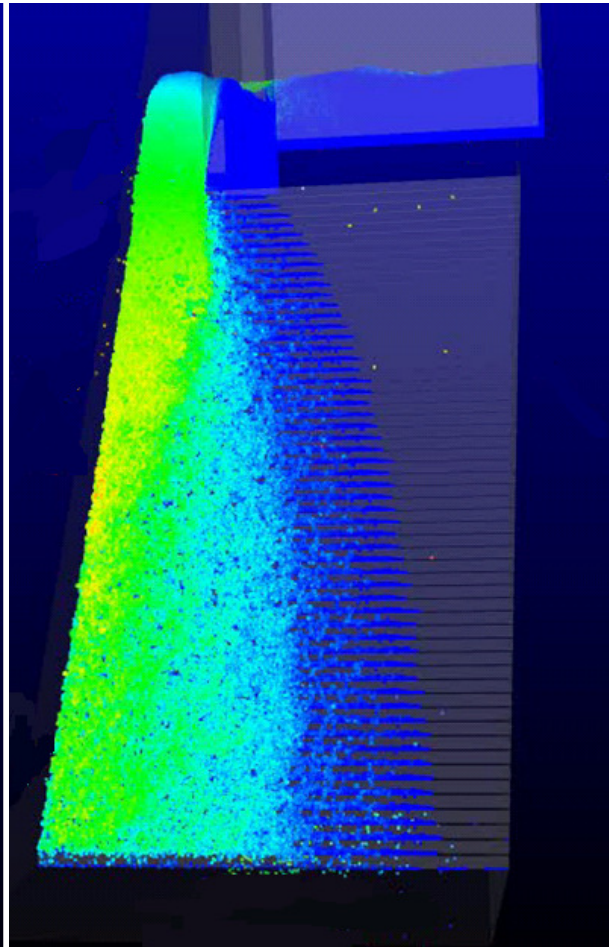


Fig. 5.2.  $q_{prot} = 23.2 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$ . Rugosidad  $h-4h$ .

Como consecuencia de todo lo anterior se ha optado por hacer un nuevo modelo más representativo, adoptando como dimensiones las del prototipo y con partículas más pequeñas, y centrado en la zona del vertedero donde el flujo no se vea afectado por la aireación, lo que, en primer lugar, nos permitirá hacer un análisis mucho más preciso de la representatividad del modelo SPH, y en segundo lugar, analizar algunos aspectos del flujo.



### 3.2 Modelo numérico a escala 15:1 del modelo físico.

La experimentación realizada sobre el modelo a escala 10:1, ha puesto de manifiesto una serie de carencias que se han modificado en el nuevo para mejorar su representatividad. Se ha adoptado la escala del prototipo (15:1), y se ha centrado el estudio en la parte superior del vertedero y primeros escalones de expansión. La reducción del dominio de estudio nos ha permitido emplear partículas de fluido más pequeñas, de 12 cm. Teniendo en cuenta que este modelo es 1.5 veces mayor que el anterior, el disponer partículas de 12 cm equivale a emplear partículas de 8 cm en el modelo 10:1, es decir, prácticamente la mitad del tamaño. Esta mejora de escala aumenta considerablemente el número de partículas de fluido necesarias para simular los diferentes flujos. Cuanto menor sea el tamaño de las partículas mejor serán los resultados, sin embargo, las limitaciones computacionales hacen difícil discretizar aún más el fluido.

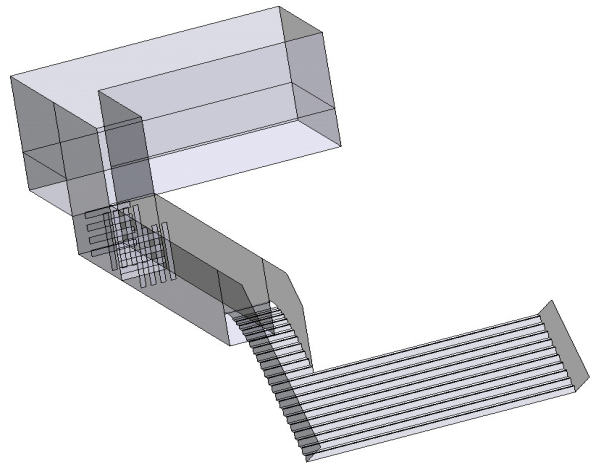


Figura 6. Geometría del contorno del modelo a la escala de prototipo.

No obstante, y como veremos más adelante, el grado de discretización es suficiente dada la convergencia obtenida entre los resultados de modelo físico y modelo numérico SPH.

La figura 6 muestra la geometría del contorno del modelo. Reproduce el vertedero con el cajero de guiado hasta el escalón número 10. Posteriormente se reproduce hasta el escalón 20, ya sin el cajero. Para mejorar tranquilización del flujo en la alimentación se han incluido unas pantallas que a modo de rejillas que producen una pérdida de carga y homogeneizan la entrada del flujo a la zona de estudio.

Para realizar el estudio hidrodinámico del tramo inicial de la rápida y su calibración con valores del modelo físico se han seleccionado unos caudales unitarios de 5, 10 y 15 m<sup>3</sup>/s por m de ancho de vertedero. La figura 7 muestra el funcionamiento una vez estabilizado el caudal de 5 m<sup>3</sup>/s para lo que ha sido necesario emplear 2.960.000 partículas de fluido.

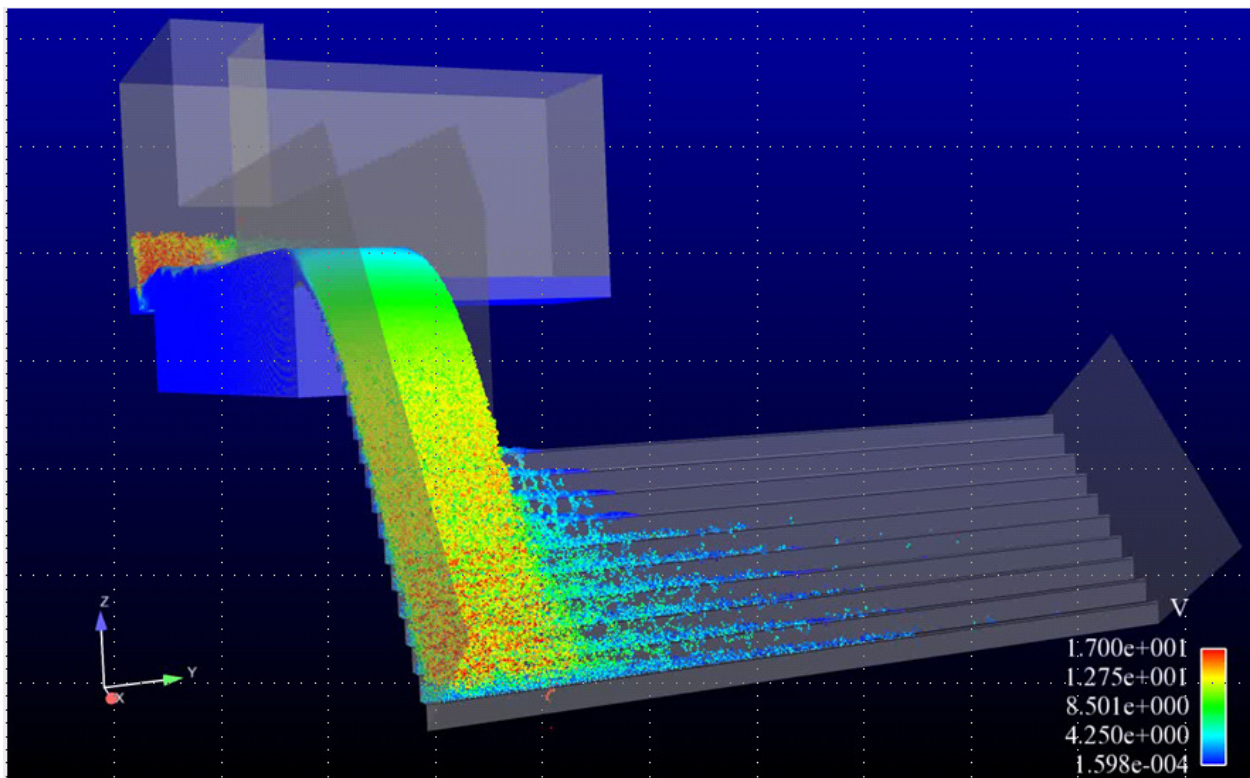


Figura 7. Modelo SPH a escala de prototipo funcionando para un caudal estabilizado de  $q=5$  m<sup>3</sup>/s.

La comparación entre las figuras 8 y 9 muestra la gran similitud de funcionamiento entre modelo físico modelo SPH. Las líneas de color rojo en la figura 8 muestra la zona reproducida en el modelo numérico. En el escalón 20 la expansión lateral de la rápida llega a unos 170 cm, medidos desde el cajero derecho, lo que supone un ancho de 25.5 m en el prototipo, Esta expansión se ajusta bastante bien a la expansión registrada en el modelo SPH (Figura 9) .

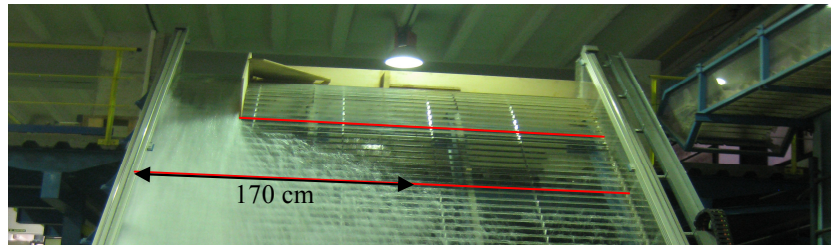


Figura 8. Modelo físico. Caudal unitario en el vertedero.  $q=5 \text{ m}^2/\text{s}$ . Las líneas rojas reflejan la zona reproducida en modelo físico.

Se ha obtenido el perfil de velocidades en el escalón 10, donde el flujo aún no se encuentra aireado. Para ello se ha programado un algoritmo que promedia la velocidad en una serie de puntos sobre una línea perpendicular al paramento de la rápida.

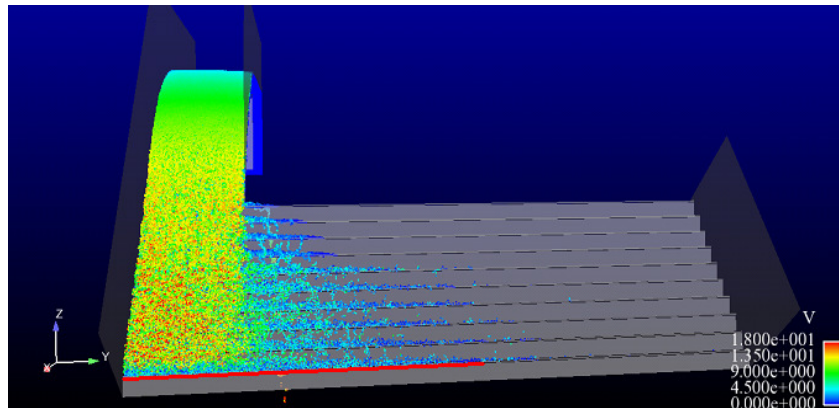


Figura 9. Modelo SPH. (15:1). Caudal unitario en el vertedero  $q=5 \text{ m}^2/\text{s}$ . La línea roja reproduce la expansión en el modelo físico.

Si se observa la figura 10.1 se entiende la dificultad en determinar con un valor numérico la posición de la lámina libre. El criterio adoptado se basa en la discretización empleada para el cálculo de velocidades, estudiando la cantidad de partículas que sirve de base para el promediado de velocidades, situando la lámina libre a la cota a la que baja la densidad de partículas.

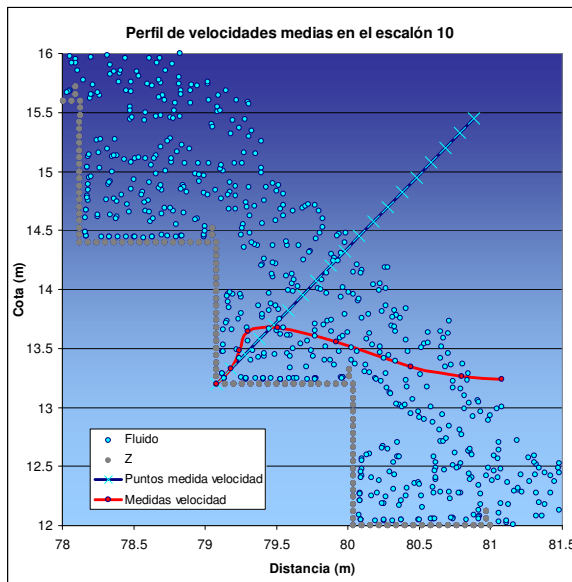


Figura 10. 1.  $q=5 \text{ m}^2/\text{s}$ . Perfil de velocidades en el escalón 10. Medidos según la línea de puntos.

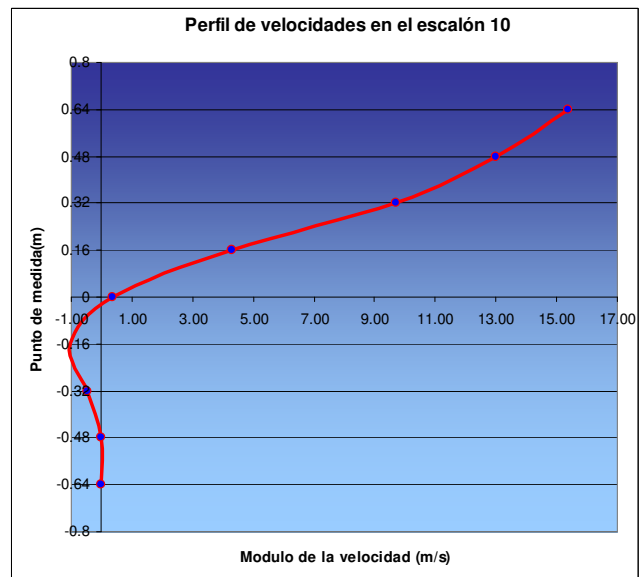


Figura 10. 2.  $q=5 \text{ m}^2/\text{s}$ . Valores del perfil de velocidades en el escalón 10.

La figura 11 presenta el perfil de presiones en el escalón 10, obtenido a través del promediado de los registros de presión en tres puntos en la contra huella y dos en la huella. Como vemos, reproducen un estado de presiones que se encuentra avalado por la experiencia. Las presiones en la huella aumentan a medida que está más próxima la arista del escalón. Así mismo, en la contra huella es posible apreciar una reducción de la presión media según nos aproximamos a la arista, pudiendo producirse depresiones en puntuales aunque con presiones medias próximas a la atmosférica.

La figura 12 muestra una superposición de las partículas de fluido en la rebanada central del veredero, comparándola con las presiones que se han medido en las huellas de los escalones impares. Se aprecia como las presiones coinciden sensiblemente con la lámina vertiente. La tabla 1 muestra los valores numéricos de las presiones.

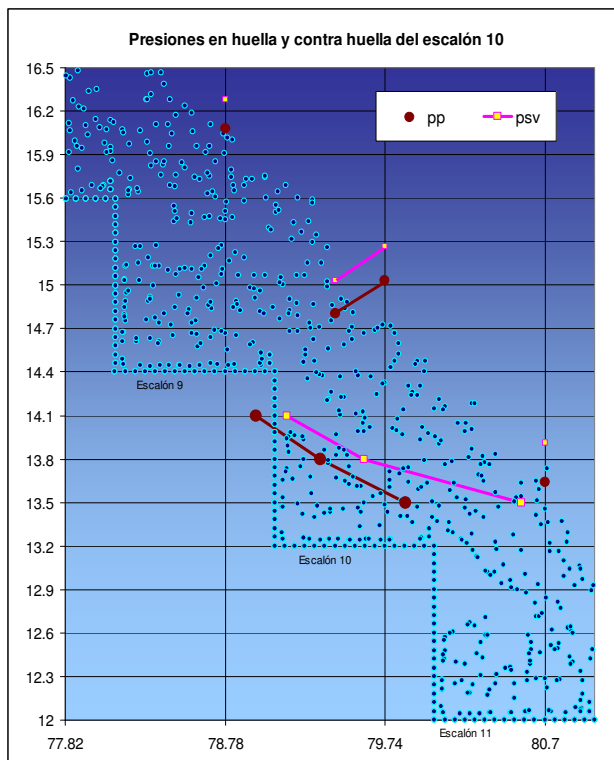


Figura 11.  $q=5 \text{ m}^2/\text{s}$ . Perfil de presiones sobre el paramento del escalón 10. Pp: Presión de las partículas de fluido. Ps: Presión de las partículas de contorno

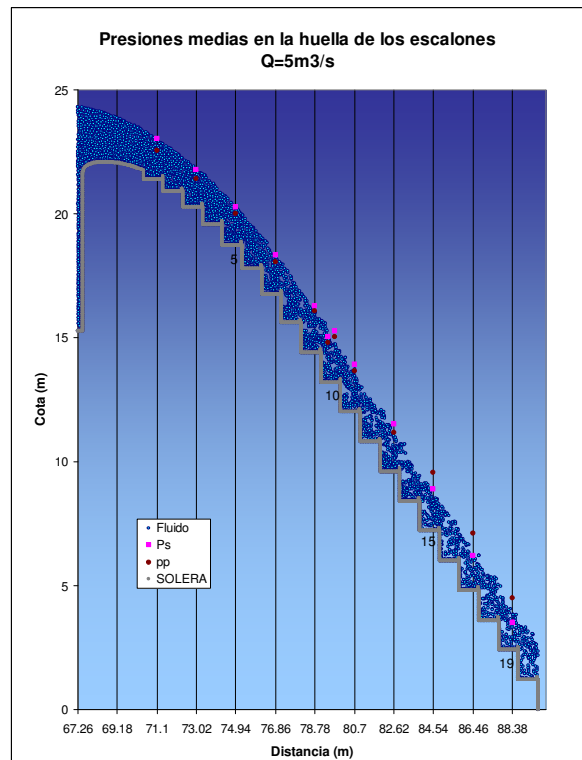


Figura 12.  $q=5 \text{ m}^2/\text{s}$ . Comparación de presiones medias en el eje del vertedero en los escalones impares

Una de las ventajas de la simulación numérica es poder analizar la trayectoria de partículas. La figura 13.1 muestra la trayectoria de una de ellas que desciende junto al cajero derecho de la rápida. Vemos como la partícula llega al veredero ganando velocidad en su camino hasta que, a la altura del escalón 13, queda atrapada en el vórtice, dando una serie de vueltas hasta que escapa para reincorporarse al flujo principal. Este proceso ilustra correctamente la forma en que se produce la transferencia de cantidad de movimiento entre el flujo rasante y los vórtices de los remolinos.

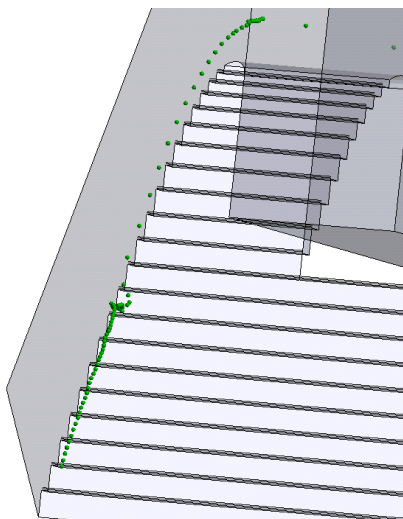


Figura 13.1. Trayectoria de partícula.

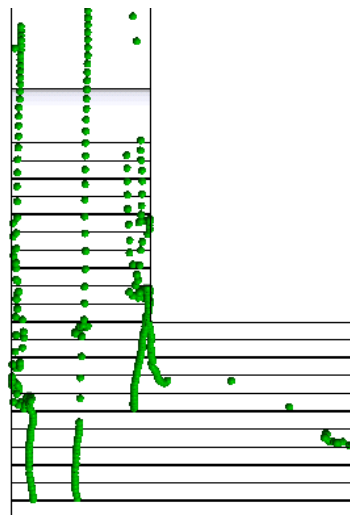


Figura 13.2 Trayectorias de partículas.

La figura 13.2 muestra la trayectoria de diferentes partículas. Se aprecia que todas ellas son atrapadas en algún remolino y vemos como una de ellas se aleja de la zona del flujo principal para adentrarse en la zona de expansión del flujo.

También se ha estudiado el reparto de caudal por metro de ancho en la rápida en diferentes escalones. Se han seleccionado los escalones 5 y 10 dentro de la zona de flujo guiado por ambos cajeros y los escalones 15 y 19 ya en zona de expansión.



La figura 14 muestra el reparto. En ésta se cuantifica la transmisión del caudal unitario de la zona alimentada por el vertedero a la zona de expansión de flujo por ausencia de cajero.

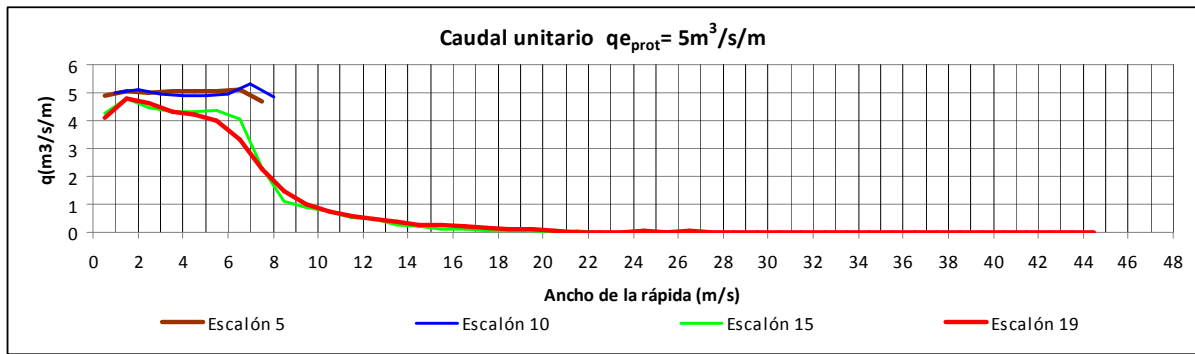


Figura 16. Reparto de caudal unitario en la rápida.

## 4 Comparación de resultados de modelo físico y modelo SPH

El análisis de presiones y velocidades en el modelo físico se ha realizado principalmente en la zona aireada, por esta razón, no se dispone de datos experimentales del modelo físico de presión y velocidad para contrastar con los valores del modelo numérico SPH. La mejor comparación que se puede hacer es entre los datos del modelo físico en el escalón 22 con los valores del modelo SPH en el escalón 19, donde además debe tenerse en cuenta que los valores del modelo físico ya se encuentran afectados por la aireación.

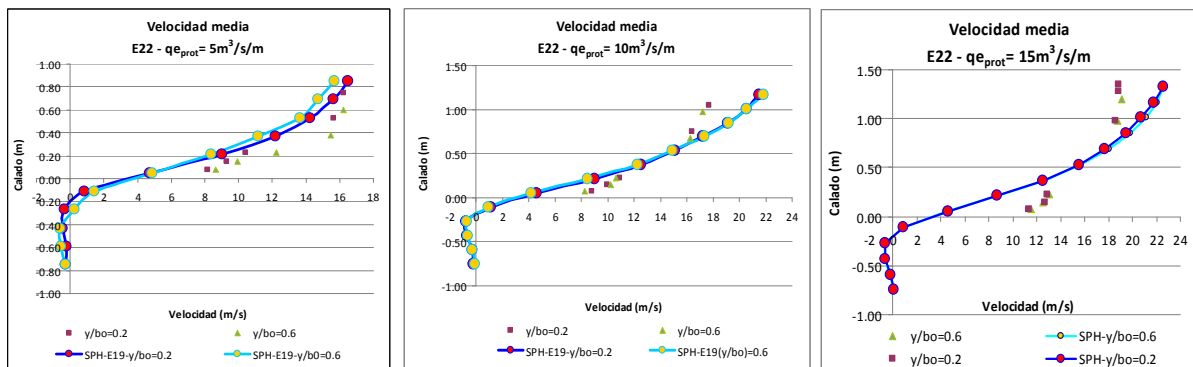


Figura 17.  $q=5 \text{ m}^2/\text{s}$ . comparación de velocidades: modelo físico en el escalón 22 vs. modelo numérico SPH en el escalón 19.

La figura 17 muestra la comparación de los perfiles de velocidad entre ambos modelos, obtenidos en dos secciones, a unas distancias dimensionales respecto del cajero derecho  $y/bo=0.2$ , y  $y/bo=0.6$ , siendo  $b_0$  el ancho del vertedero (7.5 m en el prototipo y 0.5 m en el modelo físico). Se aprecia una gran concordancia entre los resultados de ambos modelos, en especial para el caudal de  $5 \text{ m}^2/\text{s}$  para el que al aireación no condiciona el flujo. Se aprecia que para los caudales unitarios superiores, la semejanza es muy buena excepto en las proximidades de la superficie libre donde se aprecia un frenado del flujo por efecto de la aireación en el modelo físico, que no es reproducido por el modelo SPH.

La figura 18 muestra una comparación de las presiones medias registradas en la huella del escalón 22 en el modelo físico y del escalón 19 en el numérico calcula con ambos métodos.

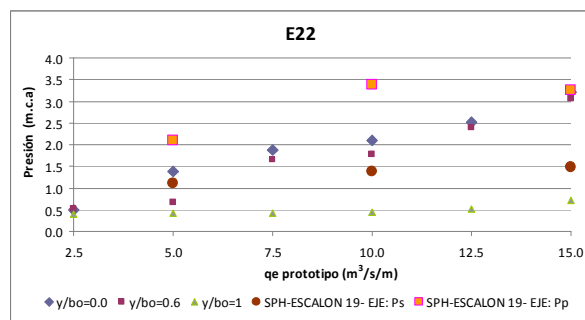


Figura 18. Presiones SPH vs. M.físico

## 5 Conclusiones.

El modelo numérico realizado a escala 10:1 del modelo físico con partículas de fluido de 15 cm no resulta representativo a la hora de reproducir la expansión lateral del flujo, debido fundamentalmente a un efecto de escala. Este ensayo también ha permitido comprobar que los contornos materializados mediante fuerzas de Lenard-Jones resultan muy poco rugosos, generando una resistencia al flujo demasiado baja. Se han realizado ensayos con diferentes disposiciones de las partículas del contorno para conseguir aumentar esta resistencia al flujo.

Con el modelo numérico a escala de prototipo (15:1 del modelo físico) y partículas de 12 cm, se mejora considerablemente la representatividad para reproducir la expansión lateral. Los perfiles de velocidades muestran gran representatividad del modelo numérico si bien para caudales unitarios altos se aprecia un flujo más ralentizado en las proximidades de la superficie libre por efecto de la aireación, fenómeno que no puede ser reproducido en un modelo monofásico.

La comparación realizada entre presiones medias en la huella del escalón 22 en el modelo físico, con las obtenidas en el modelo SPH en el escalón 19 presenta valores de presión semejantes y manifiestan la misma tendencia de aumento de la presión con el aumento del caudal unitario.

La simulación numérica muestra que para toda la gama de caudales estudiados con un ancho de vertedero de 7.5 m (0.5 m de modelo) la transferencia de flujo hacia la zona de expansión alcanza al cajero izquierdo ya en el escalón 15. Este efecto disminuye a medida que aumenta el caudal.

Todo esto apunta a el empleo de la técnica numérica SPH supone una herramienta útil para profundizar en el conocimiento del flujo hidrodinámico en rápidas escalonadas.

## 6 Agradecimientos

A Jose María Grassa por su enorme generosidad y al CEPYC (CEDEX) por la ayuda prestada tanto en recursos humanos como en equipos de cálculo sin la que no habría sido posible este estudio.

## 7 Referencias bibliográficas

- GRASSA, JM. (2004). "El método SPH. Aplicaciones en ingeniería marítima". Revista de ingeniería civil, 133
- GRASSA, JM. (2007). "Wave forces on a wavemaker. SPH simulation and comparison with analytic results". 32nd Congress of IAHR, the International Association of Hydraulic Engineering & Research. 2007, (Venice 1-6 de Julio de 2007), v. I, 2007. P. 100. ISBN 88-89405-06-6.
- LENNARD-JONES, J. E. (1924), "On the Determination of Molecular Fields", Proceedings of the Royal Society A 106 (738): 463-477, doi:10.1098/rspa.1924.0082.
- LÓPEZ, D., MARIVELA, R., GARROTE L. (2010) "Smooth Particle Hydrodynamics Model Applied To Hydraulic Structures: A Hydraulic Jump Test Case". Journal of Hydraulic Research. Vol 48. , Extra Issue (2010), pp. 142-158. ISSN: 0022-1686.
- MONAGHAN, J.J. (1994). "Simulating free surface flows with SPH. Journal of Computational Physics", 110, 1-15.
- MONAGHAN, J.J. (2005). "Smoothed Particle Hydrodynamics". Reports on Progress in Physics, 68, 1703-1759.
- MARIVELA, R., LÓPEZ D. (2011) "Calibración de la rugosidad de contorno en modelos SPH". Actas del Congreso JIA 2011.