

Simulación de flujos bifásicos con metodología CFD y contrastación de resultados con medidas de laboratorio

José María Carrillo Sánchez

Universidad Politécnica de Cartagena. Grupo de I+D+i Hidr@m

jose.carrillo@upct.es

Luis G. Castillo Elsitdié

Universidad Politécnica de Cartagena. Grupo de I+D+i Hidr@m

luis.castillo@upct.es

1 Introducción

El vertido por coronación es una de las formas de disipación de energía empleado en las presas arco. La disipación de energía se realiza mediante la interacción del chorro en el aire y en el cuenco de disipación.

Para la adecuada elección de la profundidad del cuenco de amortiguación, el calculista debe conocer la magnitud y frecuencia de la presión dinámica en el fondo del cuenco en función de las características del chorro incidente.

Existen diferentes formulaciones empíricas que caracterizan las presiones en los cuencos de disipación. Todas ellas se basan en estudios de modelos a escala en laboratorio dada la complejidad de instalar instrumentación en prototipos. Se destacan los estudios de Moore (1943), Lencastre (1961), Cola (1965), Aki (1969), Hartung and Häusler (1973), Beltaos (1976), Xu-Do-Ming et al. (1983), Lemos et al. (1984), Cui Guang Tao et al. (1985), Ervine and Falvey (1987), Withers (1991), Ervine et al. (1997), Bollaert (2002), Bollaert and Schleiss (2003) and Manso et al. (2005).

En España, esta línea de investigación se ha desarrollado en la Universidad Politécnica de Cataluña por Castillo (1989, 1998), Armengou (1991), Castillo et al. (1991, 1999, 2007), Puertas (1994), y en la Universidad Politécnica de Cartagena por Castillo (2002, 2006, 2007) y Castillo et al. (2007, 2009, 2010, 2011).

La disipación de energía del chorro se puede dividir en cuatro fases: disgregación del chorro en el vuelo (aireación más atomización), arrastre de aire cuando el chorro entra en el cuenco, difusión en el cuenco y finalmente impacto con la solera del cuenco (Figura 1).

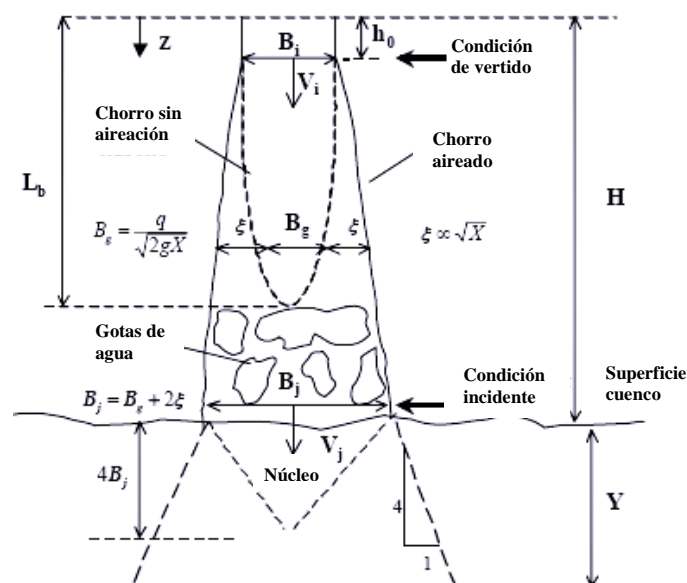


Figura 1 Esquema de comportamiento del chorro (adaptado desde Ervine et al. 1997)

De cara al diseño, se definen las condiciones de vertido e incidentes. Las condiciones de vertido, localizada a la salida del aliviadero, se establece mediante la velocidad media $V_i = (2g/h_0)^{1/2}$, siendo h_0 aproximadamente el doble de la altura de la carga sobre el vertedero h . En la entrada del chorro al colchón de agua se definen las condiciones incidentes, definidas por la velocidad media V_j y el ancho del chorro $B_j = B_g + 2\xi$, donde B_g es el ancho por condiciones gravitatorias y ξ es la expansión lateral del chorro por efectos de aireación y turbulencia.

La longitud de rotura del chorro, L_b , presenta gran importancia en la metodología expuesta a continuación. Cuando se supera esta distancia el chorro se encuentra totalmente disgregado, estando formado por grandes gotas de agua que se van descomponiendo en gotas más pequeñas debido al rozamiento con el aire.

2 Metodología paramétrica

A partir del estudio de presiones en el cuenco, Castillo (2006, 2007) propuso la siguiente metodología paramétrica para estimar las variables a tener en cuenta en el fenómeno de vertido libre:

A partir de la intensidad de turbulencia en la condición de vertido, T_u^* , se obtienen los espesores del chorro en la condición inicial, B_i , e incidente, B_j , siendo:

$$T_u^* = \frac{q^{0.43}}{IC} \quad (1)$$

donde q es el caudal específico e IC son las condiciones iniciales de vertido:

$$IC = \frac{14.95g^{0.50}}{(K^{1.22}C_d^{0.19})} \quad (2)$$

siendo g la aceleración de la gravedad, K un coeficiente experimental de ajuste (para una primera aproximación se considera $K \approx 0.85$), y C_d el coeficiente de descarga.

La longitud de rotura se obtiene de la expresión:

$$\frac{L_b}{B_i F_i^2} = \frac{K}{(k_\varphi T_u F_i^2)^{0.82}} \quad (3)$$

siendo F_i el número de Froude, T_u la intensidad de turbulencia en la condición inicial de vertido ($T_u \approx 0.012$ cuando $q \gg 0.25 \text{ m}^2/\text{s}$) y k_φ coeficiente del parámetro de turbulencia.

La anchura del chorro incidente, viene determinada por:

$$B_j = B_g + 2\xi = \frac{q}{\sqrt{2gH}} + 4\varphi\sqrt{h_0}[\sqrt{H} - \sqrt{h_0}] \quad (4)$$

donde H es la diferencia entre la cota de la lámina libre aguas arriba y del cuenco, y $\varphi = k_\varphi T_u^*$ es un nuevo parámetro de turbulencia (Castillo, 2006, Castillo et al., 2007, 2011).

Para el coeficiente de presión dinámica media en la solera del cuenco, C_p , Castillo considera dos formulaciones atendiendo a la relación entre el calado en el cuenco de amortiguación, Y , y la anchura del chorro incidente, B_j :

- Cuando $Y \leq 4B_j$, el coeficiente de presión dinámica media se calcula mediante la expresión:

$$C_p = 0.36(H/L_b)^{-1.04} \quad (5)$$

- Cuando $Y > 4B_j$, se obtiene a partir de la relación exponencial:

$$C_p = \frac{H_m - Y}{V_j^2 / 2g} = ae^{-b(Y/B_j)} \quad (6)$$

donde H_m es la carga de presión media registrada en la solera del cuenco en el punto de estancamiento, y los coeficientes a y b se obtienen de la tabla 1.

Tabla 1 Parámetros a y b para el cálculo de C_p cuando $Y > 4B_j$

H/L_b	A	B	C_p ($Y/B_j \leq 4$)
< 0.5	0.98	0.070	0.78
0.5-0.6	0.92	0.079	0.69
0.6-0.8	0.65	0.067	0.50
1.0-1.3	0.65	0.174	0.32
1.5-1.9	0.55	0.225	0.22
2.0-2.3	0.50	0.250	0.18
> 2.3	0.50	0.400	0.10

Para la trayectoria central del corroy se considera la fórmula propuesta por Scimeni (1930):

$$x^* = [2.155(y^* + 1)^{1/2.33} - 1] \quad (7)$$

$$x^* = x/h; \quad y^* = y/h \quad (8)$$

donde x e y son los ejes de coordenadas con origen en el labio del aliviadero (figura 2).

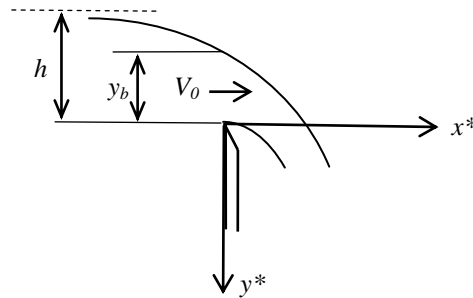


Figura 2 Origen de trayectoria según Scimeni (1930)

donde $V_0 = \alpha V = \alpha(q/y_b)$ es la velocidad inicial del chorro (velocidad en el punto de vertido), α el coeficiente de Coriolis e y_b el calado sobre el punto de vertido.

El calado del cuenco bajo el chorro, Y_u , se obtiene de la formulación propuesta por Cui Guang Tao (1985):

$$Y_u/Y = \sqrt{1 - 2F_D[(V_j/V_D)\beta \cos \theta - 1]} \quad (9)$$

donde $F_D = V_D^2/(gY)$ es el cuadrado del número de Froude, V_D es la velocidad en el cuenco aguas abajo del punto de entrada, $\beta \approx 0.6$ es el coeficiente de pérdidas a la entrada y θ es el ángulo de incidencia del chorro (figura 3).

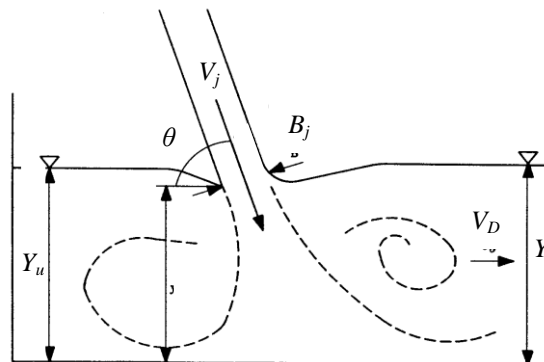


Figura 3 Esquema de relación de calados en el cuenco de amortiguamiento

3 Modelo físico

El Laboratorio de Hidráulica de la Universidad Politécnica de Cartagena cuenta con una infraestructura diseñada específicamente para el estudio de chorros turbulentos y disipación de energía en aliviaderos de vertido libre.

El modelo físico (figura 4) permite analizar caudales entre 10 y 150 l/s, y consiste en un dispositivo móvil que permite variar la altura de vertido entre 1.70 y 4.00 metros, junto a un cuenco fijo de disipación de energía de metacrilato donde se pueden disponer diferentes colchones de agua.

Para avanzar en el conocimiento del fenómeno bifásico aire-agua analizado, actualmente se están realizando mediciones de presiones instantáneas con sensores piezorresistivos ubicados en la solera del cuenco, junto al estudio de velocidades instantáneas en diferentes secciones del cuenco mediante equipos Doppler.

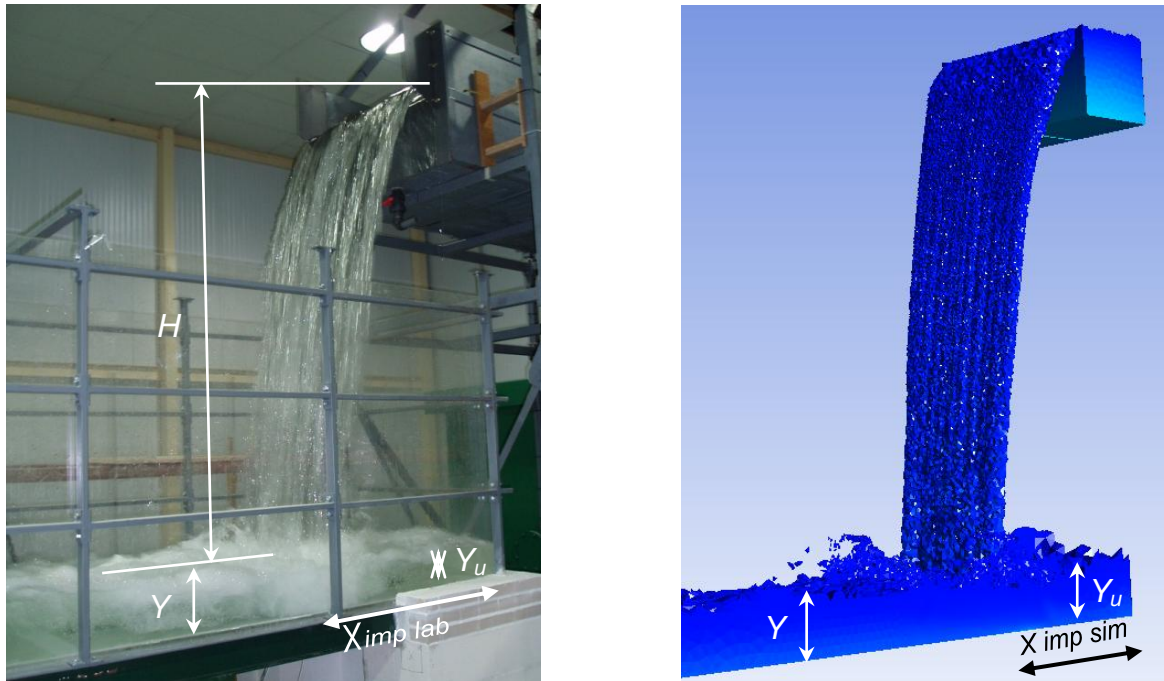


Figura 4 Lámina libre observada en laboratorio y simulada con ANSYS CFX ($q=0.056 \text{ m}^2/\text{s}$, $H=2.29 \text{ m}$, $Y = 0.16 \text{ m}$)

4 Modelo numérico

Partiendo del modelo físico comentado, y con los datos obtenidos en laboratorio, se realizó la modelación numérica con el programa comercial de Dinámica de Fluidos Computacional, CFD, ANSYS CFX (versión 12.1).

Al ser un software de volúmenes finitos, el dominio fluido del área de estudio queda dividido en volúmenes de control, en los cuales se debe satisfacer el equilibrio de las ecuaciones de Navier-Stokes que rigen el fenómeno. Por tanto, las características y el número de estos elementos influyen considerablemente en el proceso de resolución numérica.

En el estudio de los chorros turbulentos aparecen fenómenos de despegue del flujo y alta turbulencia que requieren elementos de mallado de gran calidad para su correcta resolución. La característica principal que diferencia a los distintos elementos es el número de nodos con el que resuelven las ecuaciones dentro de su volumen de control. A mayor número de nodos por elemento, más precisa será su resolución interna.

De las cuatro tipologías de elementos que permite el módulo de resolución de CFX, se optó por un mallado predominantemente basado en elementos hexaédricos, puesto que la alta turbulencia que se genera en el fenómeno estudiado, junto al despegue del flujo, requieren una mayor precisión de cálculo. Además, se ha comprobado que dichos elemento mejoran la convergencia de la solución.

En principio, las ecuaciones de Navier-Stokes describen los flujos laminar y turbulento sin necesidad de información adicional. Sin embargo, los flujos turbulentos con números de Reynolds reales abarcan un amplio rango de longitud de turbulencia y tiempos de escala. Su resolución directa implica tamaños de volúmenes finitos de mallado muy reducidos, dificultando en la práctica su solución numérica, puesto que exigen una enorme capacidades de cálculo.

Para obtener la solución en tiempos adecuados aparecen los modelos de turbulencia, diseñados para predecir los efectos de la turbulencia sin necesidad de resolver todas las escalas de turbulencia. De este modo el problema de clausura puede ser resuelto de forma eficiente.

Existen diversos modelos de turbulencia de distintos grados de complejidad que van desde los modelos isotrópicos de dos ecuaciones como el clásico $k-\epsilon$, hasta modelos de cierre de segundo orden como el denominado modelo de tensiones de Reynolds (RMS).

Los modelos de cierre de segundo orden resuelven independientemente cada componente de la velocidad turbulenta, pero tienen el inconveniente de su dificultad de convergencia. Por este motivo raramente son empleados en la industria, optándose por los modelos de dos ecuaciones dada su gran estabilidad y mayor eficiencia en la resolución.

El modelo de turbulencia $k-\omega$ fue diseñado para obtener una alta precisión en fenómenos de separación del flujo y está recomendado para las simulaciones de alta precisión de capa límite. En este estudio se han considerado dos tipos de modelos de turbulencia basados en el modelo $k-\omega$:

- Modelo de cierre de primer orden "*Shear Stress Transport*".
Estudio del conjunto chorro + cuenco de disipación.
- Modelo de cierre de segundo orden "*Baseline Reynolds Stress*".
Estudio de las componentes turbulentas del chorro.

Para la resolución del fenómeno bifásico aire-agua presente en el estudio de los chorros turbulentos, se escogió el modelo homogéneo en detrimento del modelo inhomogéneo. Este modelo se puede considerar como un caso límite del primer modelo, donde la tasa de transferencia en la interfaz de ambos fluidos es muy grande. De este modo, resuelve la interfaz considerando que en la zona de interacción ambos fluidos comparten un mismo campo de velocidades.

Se ha realizado un cálculo transitorio de 60 segundos, usando un intervalo de paso de 0.05 segundos, cuya frecuencia corresponde a la empleada en las mediciones de presiones en la solera del cuenco con sensores piezorresistivos. En la figura 5, se puede considerar que a partir de los 20 segundos de la simulación ya se alcanzan condiciones permanentes.

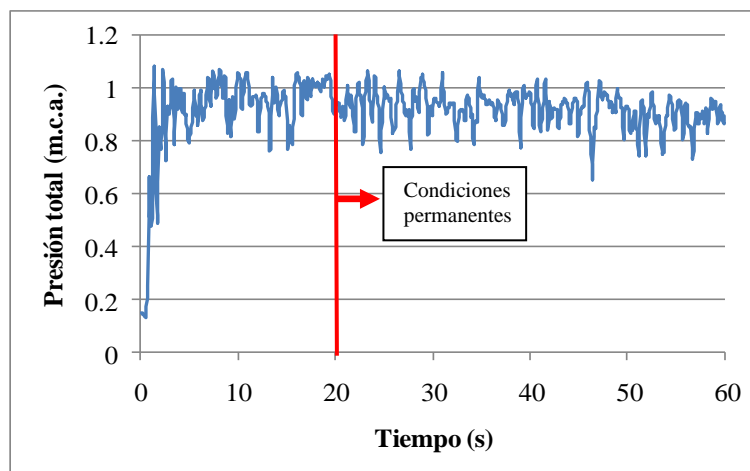


Figura 5 Simulación de la presión total en el punto de estancamiento del cuenco de disipación

Las condiciones de contorno empleadas en las simulaciones corresponden a los calados en las secciones de entrada y salida del flujo y sus distribuciones de presiones hidrostáticas.

El mallado está compuesto por un total de 750.544 elementos, siendo el tamaño de los mismos en las zonas de interés (caída del chorro e influencias del punto de estancamiento) de 0.01 m.

5 Resultados y discusión

Con el fin de reproducir del modo más fidedigno posible las condiciones de laboratorio, se midió la sección de entrada al modelo físico mediante equipos Doppler para determinar la turbulencia en el depósito del vertedero. Dicha sección se situó 0.50 m aguas arriba del punto de vertido, suficientemente alejada del mismo para evitar las distorsiones debidas a la contracción y aceleración que el flujo sufre en las inmediaciones del aliviadero (figura 6). Las velocidades turbulentas obtenidas con esta metodología se emplearon como dato de entrada en las simulaciones numéricas realizadas.

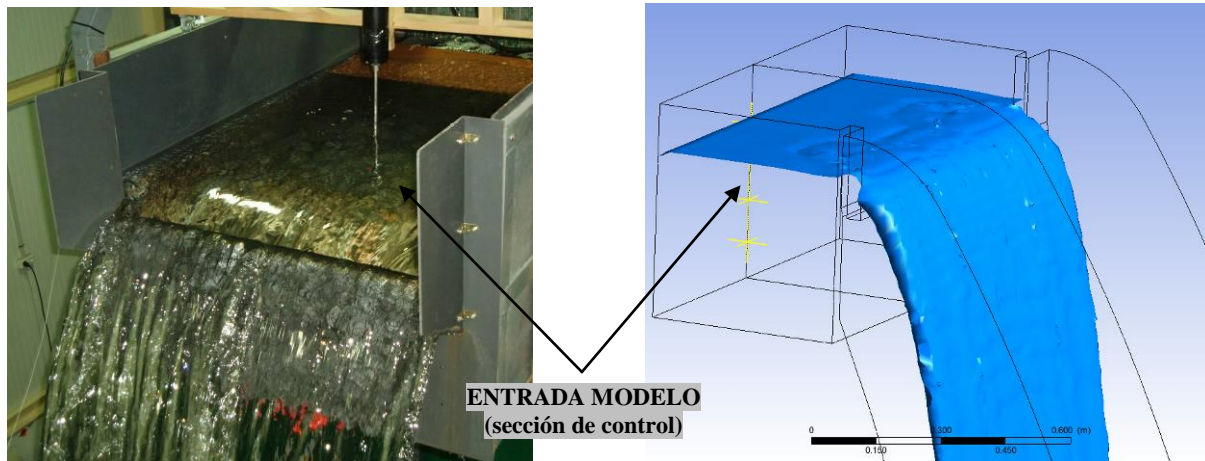


Figura 6 Sección de control de velocidades turbulentas

Una vez realizada la simulación con el modelo de turbulencia de segundo orden, se comparan las velocidades turbulentas registradas con el equipo Doppler, con la raíz cuadrática media obtenida por modelo numérico en dicha sección (figura 7).

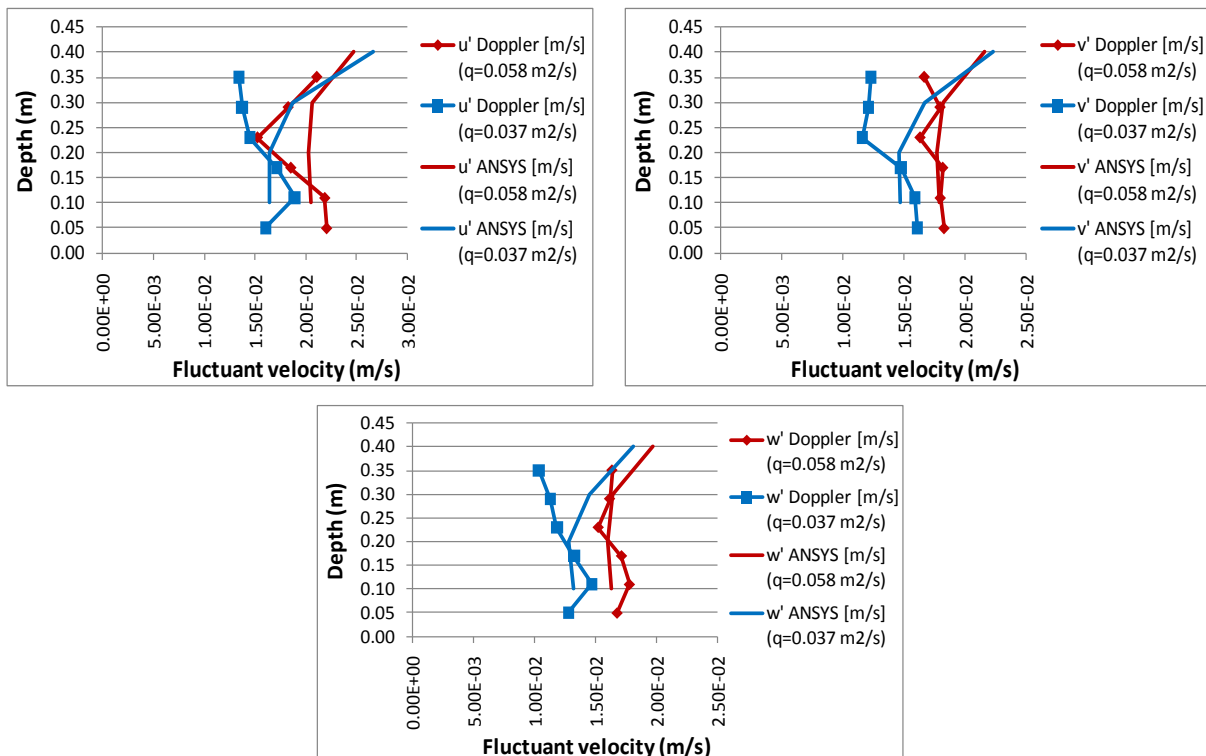


Figura 7 Comparación de velocidades turbulentas en la dirección horizontal (u), transversal (v) y vertical (w), aguas arriba del punto de vertido

Las raíces cuadráticas medias obtenidas en la simulación numérica y las registradas en laboratorio son del mismo orden en ambos caudales específicos analizados. Los valores de turbulencia a la entrada del modelo físico son elevados tal y como quedan reflejados en la tabla 2, situación que influye directamente en las características del chorro aguas abajo.

Tabla 2 Intensidad turbulenta en el depósito de cabecera

q (m^2/s)	u'_x	\bar{u}_x	T_{u_x}
0.058	0.019	0.120	0.163
0.037	0.016	0.080	0.194

Considerando una línea de corriente que parte del aliviadero, a continuación se grafican las velocidades y velocidades turbulentas para tres caudales distintos:

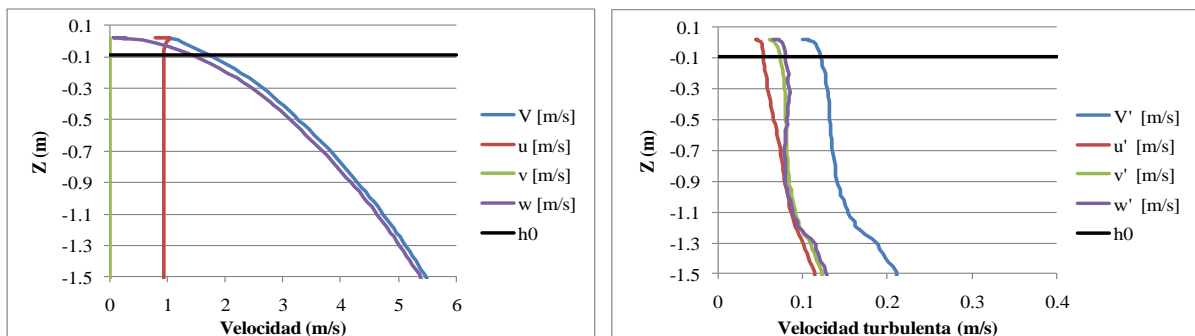


Figura 8 Velocidades medias y turbulentas ($q = 0.058 m^2/s, h = 0.091 m$)

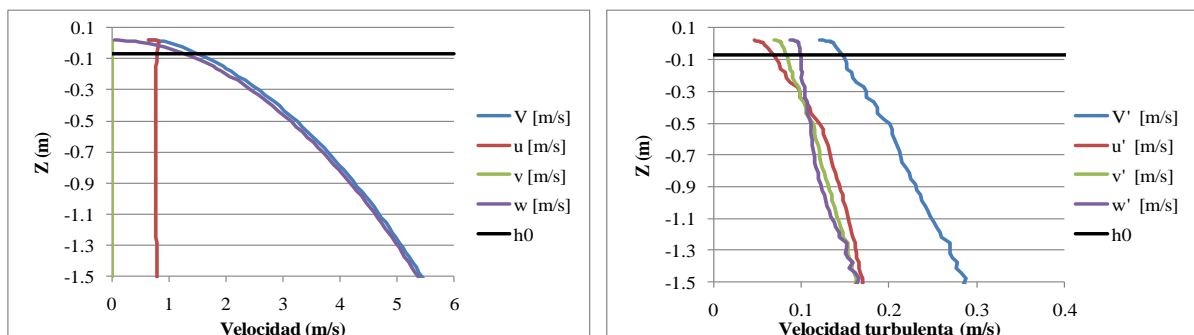


Figura 9 Velocidades y velocidades turbulentas ($q = 0.037 m^2/s, h = 0.067 m$)

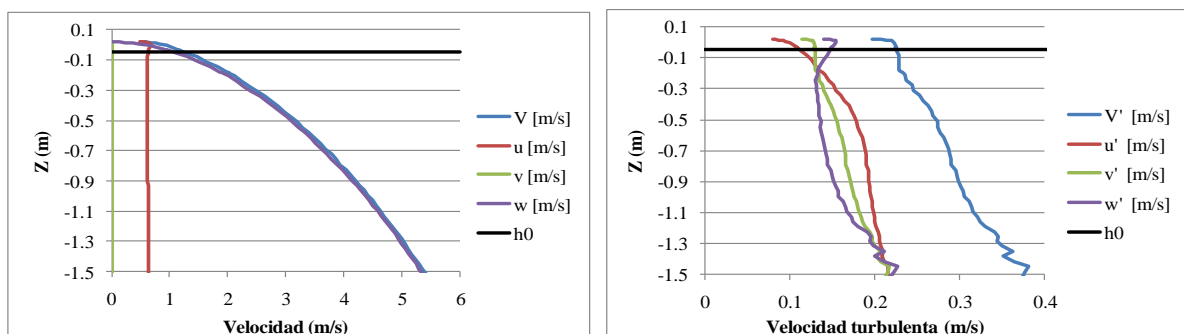


Figura 10 Velocidades medias y turbulentas ($q = 0.023 m^2/s, h = 0.047 m$)

En las figuras 8, 9 y 10 se indica la variación de las velocidades turbulentas y totales. Las velocidades turbulentas llegan a igualarse a una cierta altura de caída, aumentado conforme incrementa el caudal específico. También se observa que dichas velocidades turbulentas se incrementan con la reducción del caudal específico.

Teniendo en cuenta los valores calculados en la condición de vertido o condición inicial, en la tabla 3 se obtiene las velocidades turbulentas totales en función de la componente turbulenta vertical, w' :

Tabla 3 Velocidades turbulentas en la sección de la condición inicial

q (m ² /s)	V_i (m/s)	u' (m/s)	v' (m/s)	w' (m/s)	\bar{V}_i' (m/s)	T_u	$\bar{V}_i' = f(w')$
0.058	1.777	5.765e-02	7.260e-02	8.484e-02	1.26E-01	7.07e-02	1.48w'
0.037	1.285	6.830e-02	8.259e-02	9.740e-02	1.45E-01	1.13e-01	1.49w'
0.023	1.145	1.081e-01	1.225e-01	1.405e-01	2.15E-01	1.88e-01	1.53w'

De este modo, se obtiene $\bar{V}_i' \approx 1.50w'$, por lo que el parámetro turbulento a emplear en el método paramétrico sería $\varphi = k_\varphi (\bar{V}_i'^2 / V_i) \approx 1.50T_u^*$. Sin embargo, para confirmar estos resultados se deben realizar más simulaciones y mediciones en laboratorio.

En la figura 11 se observa que aunque el flujo llega al vertedero con una elevada intensidad de turbulencia, éste se reduce rápidamente hasta alcanzar un valor constante. Este hecho es debido a que la aceleración del flujo por efecto de la gravedad es muy superior al incremento de la velocidad turbulenta en la caída.

También se observa que en la caída, k_φ oscila menos conforme aumenta el caudal específico. Este fenómeno se debe a que las diferencias entre las componentes turbulentas aumentan conforme se reduce el ancho del chorro, volviéndose más inestable al reducirse el núcleo compacto del mismo.

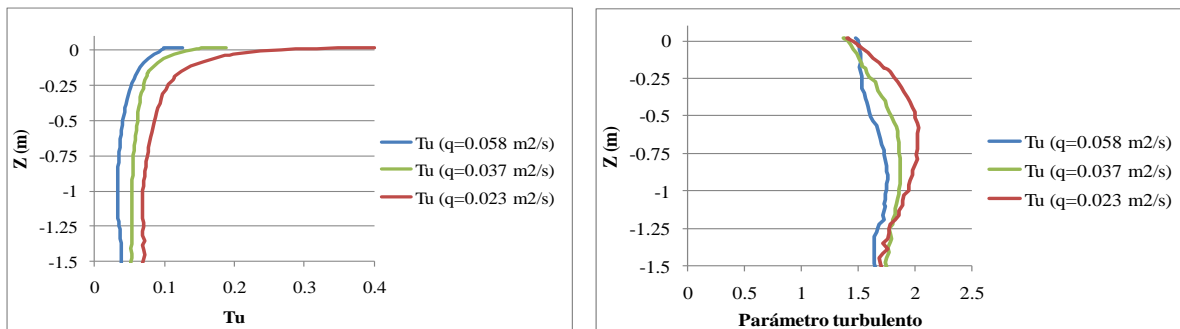


Figura 11 Evolución de la intensidad de turbulencia (T_u) y del coeficiente del parámetro de turbulencia (k_φ)

En la tabla 4 se presenta una comparación de los parámetros más importantes que aparecen en el fenómeno de los chorros turbulentos. Los datos obtenidos de las simulaciones numéricas realizadas con ANSYS CFX y de las mediciones realizadas en el Laboratorio de Hidráulica de la Universidad Politécnica de Cartagena se tabulan junto a los valores obtenidos con la Metodología paramétrica.

Tabla 4 Comparación del Método paramétrico con resultados de laboratorio y simulación numérica

$$q = 0.058 \text{ m}^2/\text{s}, H = 2.28 \text{ m}, h = 0.091 \text{ m}, Y = 0.17 \text{ m}, H/L_b = 0.73, Y/B_j = 6.71$$

	y_b (m)	V_0 (m/s)	V_i (m/s)	B_i (m)	L_b (m)	V_j (m/s)	B_j (m)	Y_u (m)	X_{imp} (m)	θ (°)	C_p
Param.	0.083	0.76	1.54	0.053	3.12	6.59	0.025	0.17	0.73	81.58	0.41
Lab	0.087	-	-	-	-	-	-	0.16	0.74	-	0.30
CFX	0.078	0.77	1.78	0.048	>H	6.32	0.022	0.12	0.75	82.75	0.27

Tabla 4 Cont. Comparación del Método paramétrico con resultados de laboratorio y simulación numérica

$$q = 0.037 \text{ m}^2/\text{s}, H = 2.30 \text{ m}, h = 0.067 \text{ m}, Y = 0.12 \text{ m}, H/L_b = 0.85, Y/B_j = 6.89$$

	y_b (m)	V_0 (m/s)	V_i (m/s)	B_i (m)	L_b (m)	V_j (m/s)	B_j (m)	Y_u (m)	X_{imp} (m)	θ (°)	C_p
Param.	0.061	0.66	1.32	0.040	2.72	6.64	0.017	0.13	0.62	82.96	0.35
Lab	0.067	-	-	-	-	-	-	0.12	0.64	-	0.25
CFX	0.052	0.65	1.29	0.042	>H	6.28	0.009	0.08	0.63	83.25	0.13

$$q = 0.023 \text{ m}^2/\text{s}, H = 2.27 \text{ m}, h = 0.047 \text{ m}, Y = 0.13 \text{ m}, H/L_b = 0.97 \text{ m}, Y/B_j = 10.80$$

	y_b (m)	V_0 (m/s)	V_i (m/s)	B_i (m)	L_b (m)	V_j (m/s)	B_j (m)	Y_u (m)	X_{imp} (m)	θ (°)	C_p
Param.	0.043	0.59	1.13	0.029	2.33	6.62	0.012	0.13	0.51	84.21	0.10
Lab	0.047	-	-	-	-	-	-	0.12	0.54	-	0.09
CFX	0.038	0.58	1.15	0.035	1.10	6.15	-	0.08	0.53	83.23	0.06

En general, los valores obtenidos por las tres metodologías son similares, salvo algunas puntualizaciones.

Para obtener los calados, anchos del chorro y longitud de rotura en la simulación numérica se emplea un criterio fijo que consiste en delimitar la interfaz entre ambos fluidos mediante el 20 % de fracción volumétrica de agua. Los valores obtenidos con ANSYS CFX son similares a las observaciones en laboratorio y a los resultados del método paramétrico, debiéndose las divergencias al empleo de un mallado excesivamente grueso para delimitar con precisión la lámina libre. Las diferencias en el parámetro Y_u , posiblemente se deba a que en la zona situada bajo el chorro, el colchón presenta altas tasas de aireación, dificultando su obtención con el programa.

Las velocidades obtenidas con ANSYS CFX en la condición incidente son ligeramente inferiores a las obtenidas con el método paramétrico, debido a que este último no tiene en cuenta las pérdidas por rozamiento con el aire.

En los tres casos analizados, el chorro no tiene caída suficiente como para llegar a desintegrarse antes del impacto con el colchón de agua ($H/L_b < 1$). Por otro lado, se tiene un colchón efectivo ($Y/B_j > 4$). En estas condiciones, el coeficiente de presión dinámica media, C_p , calculado con el Método paramétrico es superior al obtenido con las otras metodologías debido a que los límites definidos en la tabla 1 se calcularon como envolvente de los datos obtenidos en campañas de laboratorio, quedando del lado de la seguridad. Se están realizando campañas de medición de presiones instantáneas para completar y definir con más datos dichas envolventes.

Los valores de C_p obtenidos con ANSYS CFX quedan por debajo de los resultados de laboratorio, porque posiblemente el modelo homogéneo no simula adecuadamente la pérdida de energía del chorro incidente en el aire y en el proceso de difusión, en el cuenco de disipación de energía.

6 Conclusiones

El método paramétrico empleado en el artículo está basado exclusivamente en los resultados de medidas de presiones instantáneas en la solera del cuenco de amortiguación de energía. Para avanzar en el conocimiento de los chorros turbulentos es necesario realizar más estudios experimentales, tanto en modelos como en prototipos, caracterizando simultáneamente el fenómeno de aireación del chorro junto a medidas de presión, velocidades y tasas de aireación.

Paralelamente, los resultados de laboratorio permiten calibrar y validar algunos programas comerciales de CFD. Como puede observarse, se están realizando avances en la caracterización del fenómeno de chorros turbulentos con ANSYS CFX. Está previsto realizar estudios similares con FLOW-3D, así como con algún software de tipo Lagrangiano.

7 Agradecimientos

Los autores agradecen el financiamiento recibido de la Consejería de Universidades, Empresa e Investigación de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia.

8 Referencias bibliográficas

Annandale, G.W. (2006). *Scour Technology*. McGraw-Hill, New York, USA.

ANSYS CFX (2006). *ANSYS CFX. Reference Guide. Release 11.0.*

Armengou, J. (1991). *Vertido libre por coronación presas bóveda. Análisis del campo de presiones en cuenco amortiguador*. PhD Thesis. Universidad Politécnica de Cataluña, España.

Bollaert, E., Schleiss, A. (2003). *Scour of rock due to the impact of plunging high velocity jets Part I: A state-of-the-art review*. *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 41, No.5, pp. 451-464.

Castillo, L. (1989). *Metodología experimental y numérica para la caracterización del campo de presiones en los disipadores de energía hidráulica. Aplicación al vertido libre en presas bóveda*. PhD Thesis. Universidad Politécnica de Cataluña, España.

Castillo, L., Puertas, J., Dolz, J. (1999). *Discussion about pressure fluctuations on plunge pool floors*. *Journal of Hydraulic Research*, Vol.37, No.2, pp. 272-288.

Castillo, L. (2002). *Parametrical analysis of the ultimate scour and mean dynamic pressures at plunge pools*. *Proceedings of the International Workshop on Rock Scour due to Falling High-velocity Jets*. École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Switzerland, 25-28 september 2002. Schleiss & Bollaert (eds). A.A. Balkema. ISBN 90 5809 518 5.

Castillo, L. (2006). *Areated jets and pressure fluctuation in plunge pools*. *The 7th International Conference on Hydroscience and Engineering (ICHE-2006)*, IAHR, ASCE Environment and Water Resources Institute, Drexel University. College of Engineering. DSpace Digital Library. DU Haggerty Library. Philadelphia, USA.

Castillo, L. (2007). *Pressure characterization of undeveloped and developed jets in shallow and deep pool*. *32nd Congress of IAHR, the International Association of Hydraulic Engineering & Research*, Vol.2, pp. 645-655, Venice, Italy.

Castillo, L., Puertas, J. and Dolz, J. (2007). *Discussion about Scour of Rock due to the impact of plunging high velocity jets*. *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 45, No. 6, pp. 715-723.

Castillo, L.G. and Carrillo, J.M. (2011). *Numerical simulation and validation of hydrodynamics actions in energy dissipation devices*. *34th IAHR World Congress*. International Association of Hydro-Environment Engineering and Research. Brisbane, Australia.

Cui, G. T. (1985). *Gongba yiliu shuishe dui hechuang zuoyonghi ji qi yinxiang de yanjiu*. *Shuli xuebao* (8), pp. 53-68. [Efeito do impacto, no leito do rio, da lamina descarregada sobre uma barragem-abóbada. I.C.T. TR. 829 LNEC, Lisboa, 1986].

Ervine, D.A. and Falvey, H.R. (1987). *Behaviour of turbulent jets in the atmosphere and plunge pools*. *Proceedings of the Institutions of Civil Engineers, Part. 2*, Vol. 83, pp. 295-314.

Ervine, D.A., Falvey, H.T., Withers, W.A. (1997). *Pressure fluctuations on plunge pool floors*. *Journal of Hydraulic Research*. Vol. 35, No. 2, pp. 257-279.

Manso, P.A., Bollaert, E.F.R., Schleiss, A.J. (2005). *Dynamic pressures generated by plunging jets in confined pools under extreme flood discharges*. *XXXI IAHR Congress*, Seoul, CD_Rom, pp: 2848-2860.

Puertas, J. (1994). *Criterios hidráulicos para el diseño de cuencos de disipación de energía en presas bóveda con vertido libre por coronación*. PhD Thesis. Universidad Politécnica de Cataluña, España.

Scimeni, E. (1930). *Sulla forma delle vene trascinanti*. *L'Energia Elettrica*, Aprile, pp. 293-305.

Withers, W. (1991). *Pressure fluctuation in plunge pool of an impinging jet spillway*. PhD Thesis, University of Glasgow, United Kingdom.