

# ***Análisis de la sensibilidad de un modelo numérico de flujo transitorio sobre lecho móvil a la formulación del transporte de fondo***

*Carmelo Juez*

*Javier Murillo*

*Universidad de Zaragoza, Área de Mecánica de Fluidos*

[carmelo@unizar.es](mailto:carmelo@unizar.es), [Javier.Murillo@unizar.es](mailto:Javier.Murillo@unizar.es)

## **1 Introducción**

Convencionalmente el cálculo en flujo transitorio sobre lecho erosionable ha sido resuelto desacoplando la parte hidrodinámica y la morfodinámica (1; 2). Más recientemente, Hudson et al. (3) desarrollaron un modelo acoplado para soluciones 1D en donde el transporte de fondo se calculaba a través de la ecuación de Grass. En esta fórmula la tasa de arrastre de sedimento depende de una constante de calibración, general para todo el dominio,  $A_g$ , y de la velocidad del flujo al cubo.

A partir de esta aproximación se desarrolló, validó y testeó en (4) un método numérico que unifica la formulación de forma que es posible evaluar el transporte de fondo a partir de un buen número de conocidas formulaciones empíricas: Meyer-Peter and Müller (5), Ashida and Michue (6), Engelund and Fredsoe (7), Fernandez Luque and Van Beek (8), Parker (9), Smart (10), Nielsen (11), Wong (12) and Camenen and Larson (13). Cada uno de estos modelos de transporte de sedimento de fondo fue formulado a partir de diferentes ensayos de laboratorio y es apto para un rango limitado de condiciones de flujo y sedimento.

Con este trabajo, se han analizado las diferencias que presentan estas formulaciones ante una situación hidrodinámica 1D sobre lecho erosionable. Los resultados numéricos obtenidos se comparan con datos experimentales obtenidos en ensayos de laboratorio.

## **2 Formulación matemática del modelo**

Se utilizan las ecuaciones de aguas poco profundas (conservación del volumen de agua y conservación del momento lineal en la dirección de la corriente) para modelar la parte hidrodinámica, y la ecuación de Exner (conservación del volumen de material del lecho) para modelar el comportamiento morfodinámico del fondo. El sistema de tres ecuaciones diferenciales resultante es acoplado y se resuelve a través de un método numérico descentrado explícito, (4), donde todas las variables se resuelven en un único paso.

Las ecuaciones de aguas poco profundas se obtienen de promediar en la vertical las ecuaciones de Navier-Stokes. Despreciando los términos difusivos, los efectos del viento en la superficie y el término de Coriolis, el sistema de ecuaciones resultante, formulado por unidad de ancho, queda de la siguiente forma:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1(u)}{\partial x} = S_1 \quad (2.1)$$

Donde

$$U_1 = (h, q)^T \quad (2.2)$$

son las variables conservadas con  $h$  representando la profundidad del agua, y  $q = hu$  el caudal, siendo  $u$  la componente de velocidad a lo largo del eje  $x$ .

$$F_1 = \left( q, \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right)^T \quad (2.3)$$

donde  $g$  es la aceleración de la gravedad. Por último, el término fuente es

$$S_1 = \left( 0, \frac{p_b}{\rho_w} - \frac{\tau_b}{\rho_w} \right)^T \quad (2.4)$$

donde  $\rho_w$  es la densidad del agua,  $p_b$  es el término de presión y  $\tau_b$  es el esfuerzo cortante de fondo.

La dinámica del transporte de sedimento está gobernada por la ecuación de Exner, (14), que relaciona la variación temporal de la capa de sedimento con la variación del transporte sólido.

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \xi \frac{\partial q_s}{\partial x} = \xi \omega_s (E_s - C_b) \quad (2.5)$$

Donde  $z$  representa el espesor de la capa de sedimento,  $\xi = \frac{1}{1-p}$ ,  $p$  es la porosidad del material,  $q_s$  corresponde al transporte sólido a lo largo de la coordenada  $x$ ,  $\omega_s$  es la velocidad de deposición de las partículas de sedimento,  $E_s$  es un factor adimensional que tiene en cuenta el transporte de material en suspensión y  $C_b$  es la concentración del material en suspensión. Puesto que este trabajo se centra en el transporte de sedimento de fondo la parte izquierda de la ecuación no se considera y la ecuación de Exner queda reducida a

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \xi \frac{\partial q_s}{\partial x} = 0 \quad (2.6)$$

La formulación del caudal del transporte sólido se puede basar en leyes deterministas (5; 10; 13) o en métodos probabilísticos (14; 15). Grass (16) expuso una de las leyes de transporte de sedimento más simples, que en 2D se puede escribir como

$$q_s = A_g |u^3| \quad (2.7)$$

Esta formulación determinista es adecuada para modelar materiales granulares no cohesivos y considera que siempre existe transporte de sedimento, incluso con velocidades reducidas. La constante  $A_g$  es una constante de calibración, que tiene en cuenta los efectos asociados al tamaño de grano y a la cinemática del proceso. En (4) se propuso una formulación que evita el tener que evaluar  $A_g$  con un valor característico para cada problema en particular. Además, se unificó la definición de esta constante de forma que pudiera ser escrita en función de conocidas formulaciones de transporte.

$$A_g = A_g(U) \quad (2.8)$$

A continuación, se describe el proceso de transporte de fondo en 1D y la descomposición de la constante  $A_g$  en dos coeficientes variables y dependientes de cada formulación empírica.

El transporte de sedimento se suele representar por el siguiente parámetro adimensional

$$\phi = \frac{q_s}{\sqrt{g(s-1)d_m^3}} \quad (2.9)$$

Donde  $s = \rho_s / \rho_w$  es el cociente de las densidades del material y del agua y  $d_m$  es el diámetro medio. El esfuerzo tangencial de fondo escrito en forma adimensionalizada es igual a

$$\theta = \frac{\tau_b}{g(\rho_s - \rho_w)d_m} \quad (2.10)$$

Por otra parte, el esfuerzo tangencial en el fondo, escrito en términos del coeficiente de Manning-Strickler,  $n$ , queda

$$\frac{\tau_b}{\rho_w} = ghS_f \quad S_f = \frac{n^2 u^2}{h^{4/3}} \quad (2.11)$$

De esta manera el esfuerzo adimensional se puede reescribir como

$$\theta = \frac{n^2}{(s-1)d_m h^{1/3}} u^2 \quad (2.12)$$

Las formulaciones empíricas más empleadas y que han sido testadas en este trabajo aparecen recogidas en la Tabla 1. Están escritas en función de  $\phi$  y de  $\theta$ . Los parámetros  $d_{90}$  y  $d_{30}$  hacen referencia al porcentaje del 90 % y del 30 % de partículas del material cuyo diámetro es menor a ese valor.  $S_0$  es la pendiente de fondo. El  $\theta_c$  es el esfuerzo tangencial crítico que permite, que superado ese valor, las partículas comiencen a moverse y se produzca el transporte de fondo. Cada formulación caracteriza el  $\theta_c$  de forma diferente, tal y como aparece reflejado en la Tabla 1.

Tabla 1 Resumen de las formulaciones testadas

Fórmula	$\phi$	$\theta_c$
Meyer-Peter and Müller (1948)	$8(\theta - \theta_c)^{3/2}$	0.0470
Ashida and Michue (1972)	$17(\theta - \theta_c)(\sqrt{\theta} - \sqrt{\theta_c})$	0.0500
Engelund and Fredsoe (1976)	$18.74(\theta - \theta_c)(\sqrt{\theta} - 0.7\sqrt{\theta_c})$	0.0500
Fernandez Luque and Van Beek (1976)	$5.7(\theta - \theta_c)^{3/2}$	0.0370-0.04550
Parker & Einstein (1950)	$11.2\theta^{3/2}(1 - \theta/\theta_c)^{9/2}$	0.0300
Smart (1984)	$4(d_{90}/d_{30})^{0.2}S_o^{0.6}C\theta^{1/2}(\theta - \theta_c^S)$	0.0470
Nielsen (1992)	$12\theta^{1/2}(\theta - \theta_c)$	0.0470
Wong (2003)	$4.93(\theta - \theta_c)^{1.6}$	0.0470
Wong (2003)	$3.97(\theta - \theta_c)^{3/2}$	0.0495
Camenen and Larson (2005)	$12\theta^{3/2}\exp(-\theta/\theta_c)$	0.0400

Combinando las ecuaciones (2.12) y (2.9) se puede expresar la ecuación (2.7) como

$$q_s = K_0 K_1 u^2 = A_g |u^3| \quad (2.13)$$

Con  $A_g = K_0 K_1$ ,  $K_0 = \frac{g^{1/2} n^3}{(s-1)h^{1/2}}$  y  $K_1$  variando para cada formulación de la forma que se muestra en la Tabla 2

Tabla 2 Resumen del coeficiente  $K_1$  para cada una de las formulaciones de transporte de sedimento

Fórmula	$K_1$
Meyer-Peter and Müller (1948)	$8(1 - \theta_c/\theta)^{3/2}$
Ashida and Michue (1972)	$17(1 - \theta_c/\theta)(1 - \sqrt{\theta_c/\theta})$
Engelund and Fredsoe (1976)	$18.74(1 - \theta_c/\theta)(1 - 0.7\sqrt{\theta_c/\theta})$
Fernandez Luque and Van Beek (1976)	$5.7(1 - \theta_c/\theta)^{3/2}$
Parker & Einstein (1950)	$11.2(1 - \theta/\theta_c)^{9/2}$
Smart (1984)	$4(d_{90}/d_{30})^{0.2}S_o^{0.6}C(1 - \theta_c/\theta)$
Nielsen (1992)	$12\theta^{1/2}(1 - \theta_c/\theta)$
Wong (2003)	$4.93(1 - \theta_c/\theta)^{1.5}(\theta - \theta_c)$
Wong (2003)	$3.97(1 - \theta_c/\theta)^{3/2}$
Camenen and Larson (2005)	$12\exp(-\theta/\theta_c)$

Reconstruyendo de nuevo las ecuaciones de aguas poco profundas para acoplarles ahora el transporte de sedimento queda

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = S_b + S_s \quad (2.14)$$

donde

$$U_1 = (h, q)^T \quad (2.15)$$

Con

$$F = \left( q, \frac{q^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2, A_g \frac{q^3}{h^3} \right)^T \quad (2.16)$$

Los términos fuente actualizados son

$$S_b = \left( 0, \frac{pb}{\rho_w}, 0 \right)^T \quad S_s = \left( 0, -\frac{\tau_b}{\rho_w}, 0 \right)^T \quad (2.17)$$

Y considerando la hipótesis de pequeñas variaciones en las variables y una anchura infinitesimal en el volumen de control, es posible definir el término de pendiente de fondo como

$$S_b = \left( 0, -gh \frac{\partial z}{\partial x}, 0 \right)^T \quad (2.18)$$

Con las ecuaciones (2.16) y (2.18) es posible definir el Jacobiano, J, del flujo y de los términos fuente

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (gh - u^2) & 2u & -gh \\ \xi \left( \frac{\partial q_s}{\partial h} \right) & \xi \left( \frac{\partial q_s}{\partial q} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Permitiendo de esta forma formular el sistema (2.14) como un sistema hiperbólico de ecuaciones.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + J \frac{\partial U}{\partial x} = S_s \quad (2.21)$$

### 3 Resultados

La rotura de presa que se analiza fue desarrollada en el canal experimental de la UCL Civil Engineering Department (17). El canal tenía una longitud de 6 metros y en la mitad, a los 3 metros, estaba la compuerta central que permitía simular una rotura de presa ideal. La anchura del canal era constante e igual a 25 cm. El material era arena con las siguientes propiedades: tamaño de partícula con diámetros variando de 1.2 a 2.4 mm, con un  $d_{50} = 1.82$  mm, densidad  $\rho_s = 2683$  kg m<sup>-3</sup>, un ángulo de fricción  $\phi = 30^\circ$ , porosidad  $p = 0.47$  y un factor de rugosidad de Manning  $n = 0.0165$  sm<sup>-1/3</sup>. Un esquema del experimento se representa en la Figura 1.

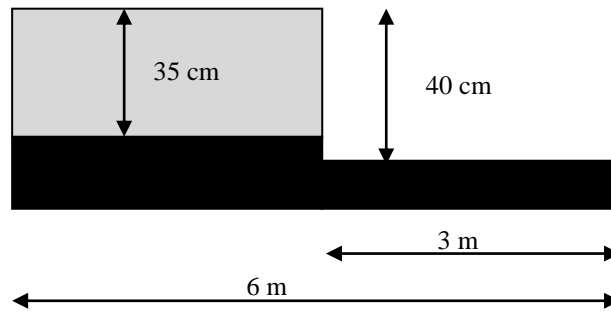


Figura 1. Esquema de la rotura de presa ideal

El tamaño de malla en las simulaciones ha sido  $\Delta x = 0.01$  y el CFL = 1.0. No se ha impuesto ninguna condición de contorno aguas abajo del dominio.

En la Figura 2 se recogen los valores predichos por la formulación de MPM (izquierda), que se ha tomado como referencia por ser la más ampliamente extendida, y la de Smart CFBS (derecha) para un tiempo de simulación  $t = 1.5$  s. Se observa como la formulación de Smart CFBS es capaz de predecir correctamente tanto el nivel superficial como el nivel de fondo en la discontinuidad. La precisión en los resultados computacionales se aprecia en la Figura 3, donde se presentan diferentes instantes de tiempo. La información es perfectamente capturada tanto en las ondas de frente como en las de rarefacción.

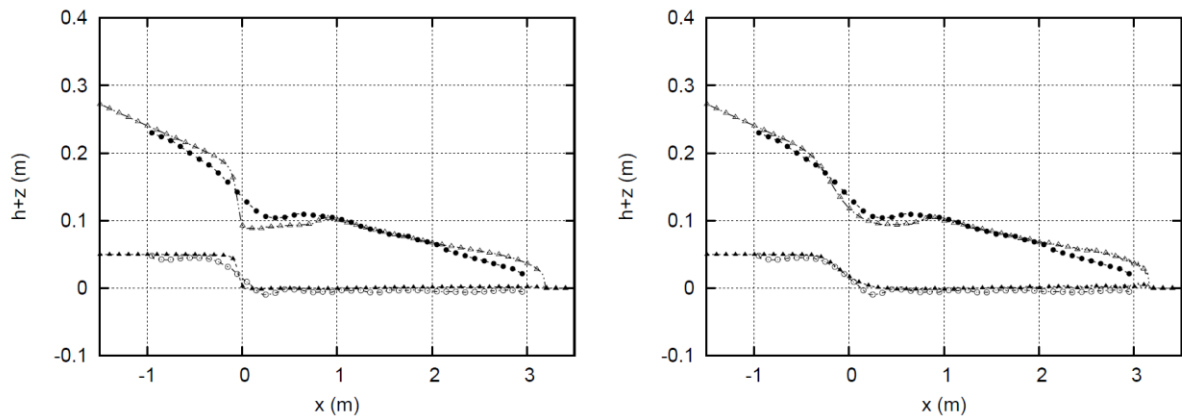


Figura 2. Resultados numéricos y experimentales para  $t = 1.5$  s usando MPM (izquierda) y Smart CFBS (derecha): nivel superficial experimental (-●-), nivel de fondo medido (-○-), nivel superficial computacional (-△-), nivel de fondo computacional (-▲-)

La Figura 4 presenta los errores, calculados como el valor absoluto de la diferencia de valores entre computacional y experimental, obtenidos para cada formulación de transporte de sedimento en el instante  $t = 1.5$  s. En la parte derecha aparece el error de fondo y en la parte izquierda el error de nivel superficial. El error cuadrático medio representado en la Figura 5, confirma que la formulación de Smart CFBS es la que menos error introduce en el cálculo de los resultados.

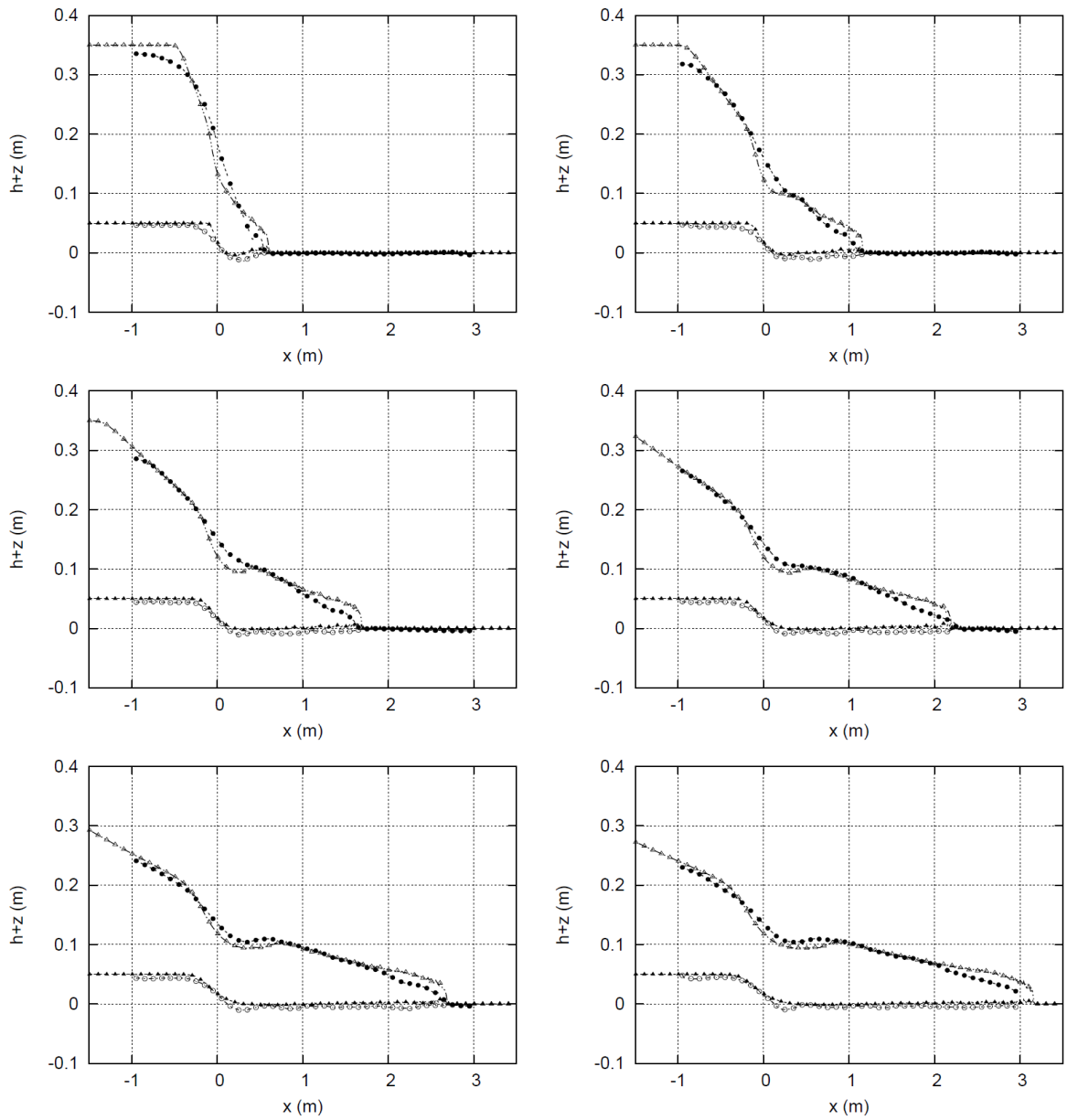


Figura 3. Resultados numéricos y experimentales con Smart CFBS para  $t = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.5$  s: nivel superficial experimental (-●-), nivel de fondo medido (-○-), nivel superficial computacional (-Δ-), nivel de fondo computacional (-▲-)

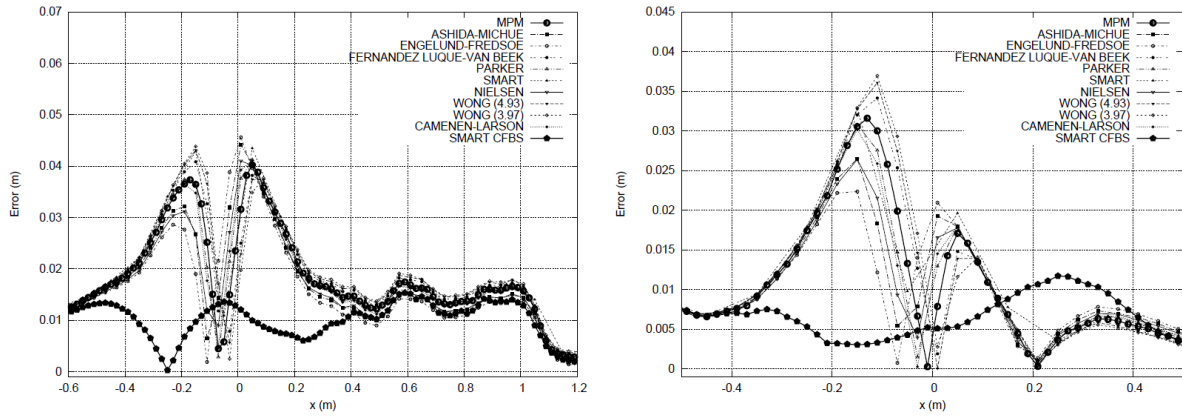


Figura 4. Módulo del nivel superficial (izquierda) y del nivel de fondo (derecha) en  $x$  para diferentes formulaciones para  $t = 1.5$  s

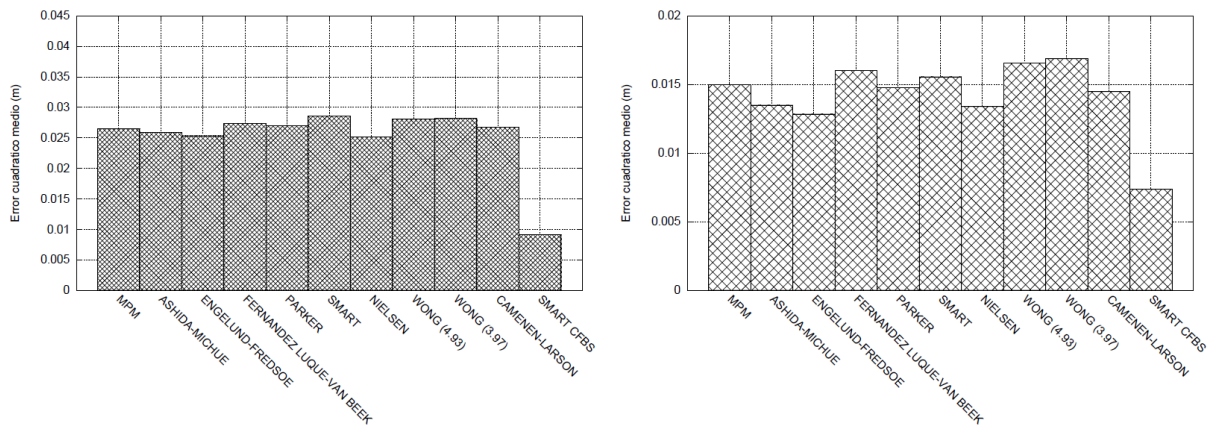


Figura 5. Error cuadrático medio para el nivel superficial (izquierda) y para el nivel de fondo (derecha) con diferentes formulaciones para  $t = 1.5$  s

## 4 Conclusiones

La utilización de la formulación de Smart CFBS permite en el caso presentado obtener unos resultados temporales y espaciales de nivel de fondo y superficie significativamente más precisos que los predichos por el resto de formulaciones. De esta manera, logrando una gran exactitud en el nivel de fondo se consigue también un modelado correcto de la superficie del agua.

## 5 Bibliografía

1. **K. K. ABDERREZAK AND A. PAQUIER.** *Applicability of Sediment Transport Capacity Formulas to Dam-Break Flows over Movable Beds.* s.l. : Journal of Hydraulic Engineering, 2011. 137, 209-221.
2. **H.J. DE VRIEND, J. ZYSERMAN, J. NICHOLSON, J.A. ROELVINK, P. PECHON, H.N. SOUTHGATE.** *Medium-term 2DH coastal area modelling.* s.l. : Journal of Coastal Engineering, 1993. 21, 193-224.
3. **J. HUDSON, P. K. SWEBY.** *Formulations for Numerically Approximating Hyperbolic Systems Governing Sediment Transport.* s.l. : Journal of Scientific Computing, 2002. 19, 225-251.
4. **J. MURILLO, P. GARCÍA-NAVARRO.** *An Exner-based coupled model for two-dimensional transient flow over erodible bed.* s.l. : Journal of Computational Physics, 2010. 229, 8704-8732.
5. **MEYER-PETER, R. MÜLLER.** *Formulae for bed-load transport.* s.l. : Report on the 2nd Meeting International Association Hydraulic Structure Research, 1948. 39-64.
6. **K. ASHIDA, M. MICHIEUE.** *Study on hydraulic resistance and bedload transport rate in alluvial streams.* s.l. : Transactions, Japan Soc. Civil Eng., 1972. 206, 569-579.
7. **F. ENGELUND, J. FREDSOE.** *Sediment transport model for straight alluvial channels.* s.l. : Nordic Hydrology, 7, Issue 5, 1976. 293-306.
8. **R. FERNANDEZ LUQUE, R. VAN BEEK.** *Formulae erosion and transport of bedload sediment.* s.l. : J. Hydraulics Resources, 14, Issue 2, 1976. 127-144.
9. **PARKER, G.** *Hydraulic geometry of active gravel rivers.* s.l. : Journal of Hydraulic Engineering, 105, Issue 9, 1979. 8704-8732.
10. **SMART, G.** *Sediment transport formula for steep channels.* s.l. : Journal of Hydraulic Engineering, 1984. 3, 267-276.
11. **NIELSEN, P.** *Coastal Bottom Boundary Layers and Sediment Transport. Advanced Series on Ocean Engineering.* s.l. : World Scientific Publishing, 1992. 4.
12. **WONG, M.** *Does the bedload transport relation of Meyer-Peter and Müller fits its own data?* s.l. : Proc., 30th IAHR-Congress, IAHR Thessaloniki, Greece, 2003. 8 pp.
13. **B. CAMENEN, M. LARSON.** *A general formula for non-cohesive bed load sediment transport.* s.l. : Estuarine, Coastal and Shelf Science, 2005. 63, 249-260.
14. **KALINSKE, A.** *Movement of sediment as bed load in rivers.* s.l. : Trans. AGU, 1947. 28, 615 - 620.
15. **EINSTEIN, H.A.** *The bed-load function for sediment transportation in open channels flow.* s.l. : U.S. Department of Agriculture, 1950. Technical Report 1026.
16. **GRASS, A.** *Sediments transport by waves and currents.* s.l. : SERC London Cent. Mar. Technol, 1981. Report No. FL29, 1981.
17. **B. SPINOWINE, Y. ZECH.** *Small-scale laboratory dam-break waves on movable beds.* s.l. : Journal of Hydraulic Research, 2007. 45, Extra Issue, 73-86.