

# ***Claves para la Modelización 3-D de Flujo sobre Vertederos Ortogonales. Contraste con Resultados Experimentales.***

*Javier González, y Jesús Flores*

*Universidad de Castilla-La Mancha. E. T. S. I. Caminos, Canales y Puertos.*

*Javier.Gonzalez@uclm.es*

## **1 Resumen**

En el proceso de modelización hidráulica de ríos o canales se requiere con mucha frecuencia la modelización de estructuras sobre las que se produce flujos tipo vertedero, que relacionan las condiciones hidráulicas de aproximación a la estructura con el caudal de paso, y en condiciones de anegamiento, las condiciones hidráulicas aguas abajo. Así es el caso de vertederos laterales o frontales en canales, o la existencia de azudes o puentes en la modelización de ríos y llanuras de inundación, por ejemplo. La presencia de este tipo de estructuras, a modelar como vertedero, controla los niveles aguas arriba. La forma geométrica del vertedero (rectangular, semicircular, cuarto de círculo), el espesor del mismo, o la profundidad del flujo en la aproximación condiciona la relación que puede establecerse entre la altura de sobrevertido y el caudal, en la forma del coeficiente de vertedero, que, por ejemplo, se muestra como uno de los parámetros más sensibles en estudios de zonas inundables entorno a ríos con un alto número de estructuras de paso modeladas mediante técnicas 1-D ó 2-D.

La modelización en un esquema 3-D mediante modelos CFD se presenta como una alternativa para la modelización de los procesos que ocurren entorno a un vertedero de pared delgada, y la influencia de geometría y las condiciones de aproximación de forma explícita, sin necesidad de implementar las relaciones experimentales de vertedero, o permitiendo de la obtención previa del valor del coeficiente de vertedero a implementar en una estructura con una geometría determinada para su modelización posterior 1-D o 2-D. Sin embargo, la capacidad de los modelos CFD de representar correctamente las condiciones de flujo sobre vertedero es muy dependiente de las particularidades de la forma en la que se modela, pudiendo obtenerse grandes desviaciones con respecto a la realidad o a resultados experimentales obtenidos mediante experimentación física.

En el presente trabajo se expone un análisis de sensibilidad que conduce a la determinación de los aspectos más importantes a tener en cuenta para la correcta representación del flujo que se produce sobre vertederos ortogonales cuando quiere ser modelado mediante un modelo CFD bifásico (agua-aire) tridimensional. Los resultados con comparados con los obtenidos experimentalmente, determinando las condiciones de flujo donde son más dominantes la profundidad del flujo de aproximación, o el espesor de la pared, y la transición entre ambas situaciones.

## **2 Introducción**

La modelización de la respuesta hidráulica de un vertedero busca cuantificar el control que este tipo de estructuras produce sobre las condiciones de flujo aguas arriba, especialmente nivel de energía, y el caudal que sobrepasa el vertedero. La geometría particular del vertedero condiciona estas relaciones entre nivel y caudal de sobrevertido. Son múltiples las formas que se pueden encontrar en las aplicaciones ingenieriles, al igual que las características del flujo que sobre el labio se producen. En este sentido los vertederos pueden clasificarse entre vertederos de pared delgada, y de pared gruesa. En los primeros el vertido se da sobre un perfil afilado, de un espesor del orden de 2 mm, produciéndose a partir del vertedero un flujo concentrado en un chorro que sigue una trayectoria en caída libre, manteniéndose aireado el chorro a lo largo de todo su perímetro, tanto en su parte superior como inferior. Por su parte, el vertedero de pared gruesa se produce cuando el flujo se desarrolla sobre un umbral plano, en el que la longitud es suficientemente grande con respecto del calado de agua para que se alcance un flujo paralelo al umbral y la distribución de presiones sea hidrostática (Chason, 2004). Entre estos dos tipos de vertederos se producen una gran variedad de geometrías, que dan lugar a diferentes relaciones entre altura de sobrevertido y caudal, diferentes distribuciones de velocidad, presiones en la zona de contacto con la

pared del vertedero, etc. Como es el caso de los perfiles de vertedero optimizados, que buscan mantener altas eficiencias en el vertedero, evitando presiones negativas sobre el paramento.

Diferentes formas de vertedero han sido estudiadas en la literatura técnica para su posible simulación con modelos numéricos, como alternativa o complemento al empleo de la modelación física, o en el caso de diseños, para permitir comprobar el comportamiento de estructuras con geometría distintas de las tipologías encontradas en los manuales y referencias técnicas. Destaca por ejemplo, el estudio de la respuesta de aliviaderos de presas ante caudales de alivio superiores a los de diseño, realizado por Ho et al. (2001), que encontraba una buena correspondencia entre los resultados numéricos y experimentales a nivel cualitativo, si bien los errores cuantitativamente se encontraban en el rango entre 10 y 20%. Chatila y Tabbara (2004) buscaron modelizar el perfil de la lámina de agua sobre la conducción de un aliviadero de presa, encontrándose consistencia en los resultados numéricos con respecto a la experimentación física, con una similitud cualitativa, y cuyas diferencias desde el punto de vista cuantitativo podrían entre otras razones deberse a los procesos de aireación y emulsión de del flujo. O trabajo de simulación de flujo sobre aliviaderos se encuentran en Savage y Johnson (2001), con errores en la estimación de la capacidad hidráulica del aliviadero de hasta el 12% para las alturas de sobrevertido más pequeñas, reduciéndose por debajo del 2% para la altura de sobrevertido de diseño. También Chen et al (2002) simulaban numéricamente el flujo sobre un aliviadero, en este caso, sobre un aliviadero escalonado, con resultados cualitativamente buenos en comparación con modelos físicos experimentales, en términos tanto de perfil de la lámina de agua, como de distribución de velocidades y presiones en los escalones, siendo un buen complemento a la modelación física, para representar la distribución de propiedades hidráulicas a lo largo de todo el perfil. Sarker y Rhodes (2004) estudiaron en su caso la simulación del flujo que se produce sobre un vertedero de pared gruesa. La representación de las características del complejo flujo que se produce entorno al vertedero fue correctamente simulada, especialmente aguas arriba del vertedero y sobre el vertedero. Agua abajo, debido a la aireación del flujo, su representatividad es muy discutible.

Muchos de los retos de simulación que se encuentran en los flujos sobre aliviaderos se encuentran en los flujos bifase que se pueden producir y la capacidad de reproducir condiciones de flujo muy cambiantes producidas por geometrías que lo condicionan. El problema de flujo que será estudiado en este trabajo es el flujo sobre vertedero con forma semicircular, en el que el flujo se aproxima perpendicularmente al vertedero. La respuesta del vertedero es muy sensible al radio de curvatura de la semicircunferencia que forma la pared del vertedero, la profundidad del flujo de aproximación y las condiciones de aireación bajo el chorro que se producen aguas abajo.

### 3 Resultados Experimentales

El comportamiento hidráulico de un vertedero con sección transversal semicircular ha sido estudiado por distintos autores. Su comportamiento es distinto en función de las condiciones de flujo que se produzcan en la cauda del chorro:

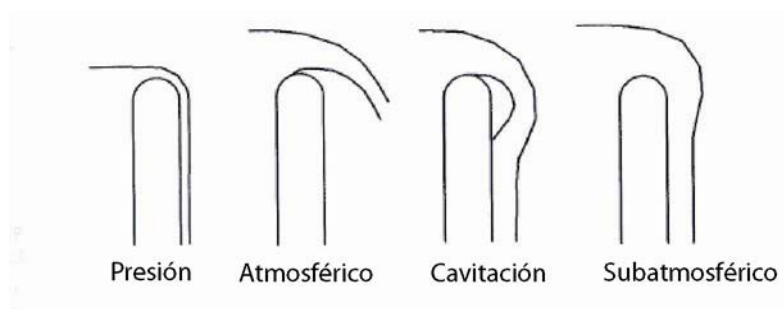


Figura 1 Tipos de flujo sobre vertedero semicircular: presión, atmosférico, subatmosférico,... (Fuente: Falvey, 2002).

Cuando la altura de sobrevertido es pequeña, la lámina de agua desliza sobre la pared del vertedero aguas abajo, dado que la velocidad es pequeña. A medida que aumenta la altura de sobrevertido, la tensión superficial impide que se produzca el despegue, hasta que llegado un punto, si existe posibilidad de que se produzca la entrada libre de aire, se produce el despegue de la lámina de agua, manteniéndose presión atmosférica bajo el chorro. Si las condiciones del entorno no permiten la entrada de aire, se producirá una depresión bajo el chorro, manteniéndose

unas condiciones de presión bajo el chorro subatmosféricas, que se mantendrá pegado a la pared del vertedero. Si el sobrevertido sigue en aumento, la depresión se acentuará y puede dar lugar al proceso de cavitación.

Estas diferentes condiciones de sobrevertido dan lugar a distintos comportamientos hidráulicos, en relación al caudal desaguado en función de la altura de sobrevertido. La capacidad de descarga es mayor para flujos subatmosféricos, debido a la depresión producida bajo la lámina de agua. Sin embargo, este tipo de vertido tiene como inconveniente la posibilidad de producirse daños por cavitación, pero sobre todo, su inestabilidad, dado que ante una pequeña irregularidad que permita la entrada de aire bajo la lámina de modo temporal puede producir la aireación de la misma y el cambio de funcionamiento. Por ello es recomendable considerar un comportamiento aireado, y permitir la aireación, especialmente si se quiere controlar el nivel producido aguas arriba.

En la caracterización del funcionamiento del vertedero suele emplearse la expresión:

$$Q = \frac{2}{3} \cdot C_d \cdot L \cdot \sqrt{2 \cdot g} \cdot h^{3/2}$$

donde:  $C_d$  coeficiente de descarga del vertedero adimensional (relacionado con el coeficiente del vertedero mediante la expresión  $C_v = \frac{2}{3} \cdot C_d \cdot \sqrt{2 \cdot g}$ )

$L$  es la longitud del vertedero

$g$  es la aceleración de la gravedad

$h$  es la altura del nivel de energía sobre el labio del vertedero en la aproximación aguas arriba del vertedero

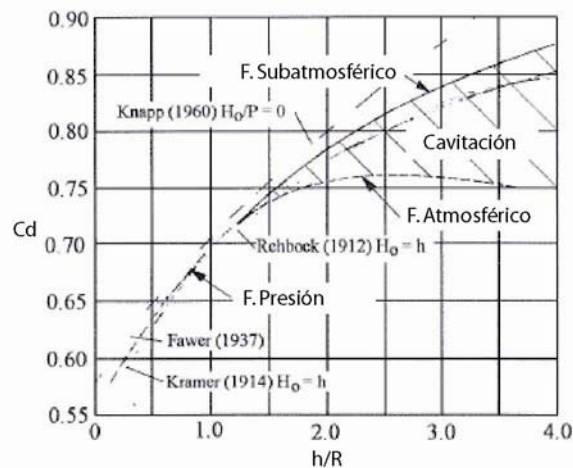


Figura 2 Coeficiente de descarga del vertedero semicircular para las diferentes condiciones de flujo (Fuente: Falvey, 2002).

El valor mínimo del coeficiente de descarga se produce cuando se tiene un vertedero de pared gruesa, es decir, se produce el calado crítico. Esta situación se corresponde con un coeficiente de descarga  $C_d = 0.578$ . Se observa que este tipo de vertederos su comportamiento es función conjunta de las variables adimensionales  $h/R$  y  $h/P$ , donde  $R$  es el radio del semicírculo y  $P$  es la altura del vertedero. Para flujo a presión o subatmosférico el parámetro que domina el comportamiento es  $h/R$ . Con flujo aireado, la lámina se separa del perfil y  $h/P$  gana importancia en el comportamiento hidráulico, lo que se corresponde con los resultados de Tullis y Waldron (1995).

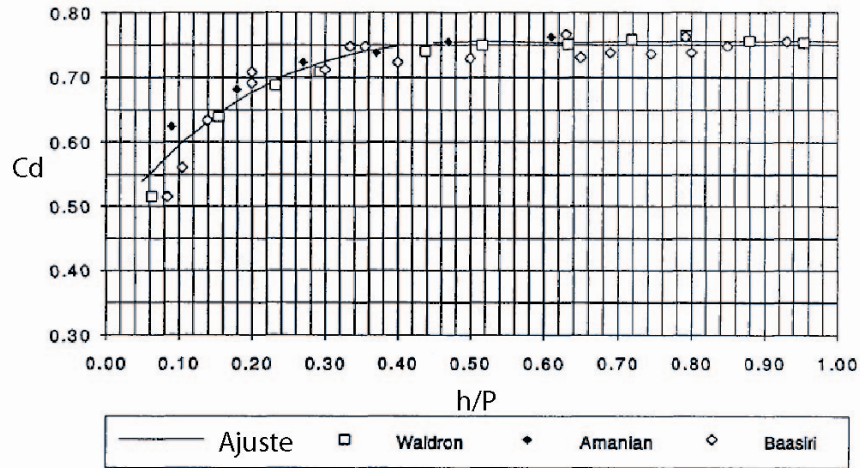


Figura 3 Coeficiente de descarga de un vertedero recto, orientado 90° con relación a la dirección del flujo (Fuente: Tullis y Waldron, 1995).

Según los ensayos realizados por diferentes autores, el coeficiente de descarga, para un vertedero a 90° es creciente hasta un valor h/P entorno a 0.5, a partir del cual se mantiene constante, con un valor entorno a  $C_d = 0.75-0.76$ , limitando en ese momento la profundidad en la forma de h/P.

## 4 Formulación del Problema Numérico

### 4.1 Ecuaciones generales y modelo de turbulencia

Las ecuaciones generales a ser resueltas son las ecuaciones 3D de continuidad y las ecuaciones de Navier-Stokes. Para un fluido incompresible estas ecuaciones pueden ser expresadas como:

$$\sum \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\rho \left( u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) = \rho K_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( -\rho \overline{u'_i u'_j} \right)$$

donde:  $u_i$  es la componente en la dirección  $x_i$  de la velocidad

$K_i$  es la fuerza volumétrica debida a la gravedad

$p$  es la presión

$\mu$  es la viscosidad dinámica

$\rho$  es la densidad del fluido

$t$  es el tiempo

$-\rho \overline{u'_i u'_j}$  es la tensión tangencia debida a la turbulencia  $\tau''_{ij}$  en el plano definido por las direcciones  $i, j$ .

La tensión tangencias (**tangencial**) debida a la turbulencia es obtenida mediante la ecuación constitutiva

$$\tau''_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Para determinar la viscosidad turbulenta  $\eta$  es empleado el modelo estándar  $k-\epsilon$  (Lauder y Spalding, 1974).

El método de volúmenes de fluido (VOF) permite calcular la forma y localización de la condición de contorno en la superficie de la lámina libre, con una presión constante (Hirt y Nichols, 1981). El campo de fracción de volumen (F) es definido en un campo Euleriano, sobre una malla fija del flujo 3D, con valores entre 1 y 0, dependiendo si la celda está completamente ocupada por líquido, o está libre de líquido, respectivamente.

La solución numérica de estas ecuaciones es resuelta mediante el paquete informático ANSYS (2005), el cuál contiene un paquete de Dinámica de Fluido Computacional (CFD) basado en el Método de los Volúmenes Finitos. La aproximación de segundo orden de Petrov-Galerkin fue utilizada para discretizar el término advectivo en la ecuación de la cantidad de movimiento. La integración en el tiempo de las ecuaciones que gobiernan el problema fue realizada mediante el método de diferencias finitas. El criterio de convergencia de las componentes de la velocidad fue  $1 \cdot 10^{-6}$ .

## 4.2 Dominio de resolución y condiciones de contorno

Si bien el flujo que se produce sobre el vertedero es un flujo 2D, el problema se define en una geometría 3D, con condiciones de simetría en los planos de contorno laterales perpendiculares al eje del vertedero. En las condiciones de aproximación aguas arriba se considera una entrada de caudal, distribuida triangularmente sobre la vertical, separada una distancia suficiente del vertedero para que la altura de agua medida sobre el vertedero en la aproximación no se vea afectada por esta condición de contorno. La pared vertical de salida se considera el efecto de salida libre.

Sobre las paredes de contacto con el vertedero se considera la condición de contorno de no deslizamiento, siendo la velocidad sobre todas estas paredes igual a cero.

El mallado del dominio de resolución se realiza con una malla no constante, en la que se incrementa la densidad de la malla en las zonas donde se producen mayores velocidades y sobre la superficie del vertedero, buscando reproducir la forma esperada del chorro que producirá el flujo, donde se van a producir mayores gradientes y cambios en la dirección de flujo y de la lámina libre.

En el caso de simulación de flujo atmosférico, en la pared del vertedero aguas abajo de la corriente se considera la condición de presión constante igual a la atmosférica.

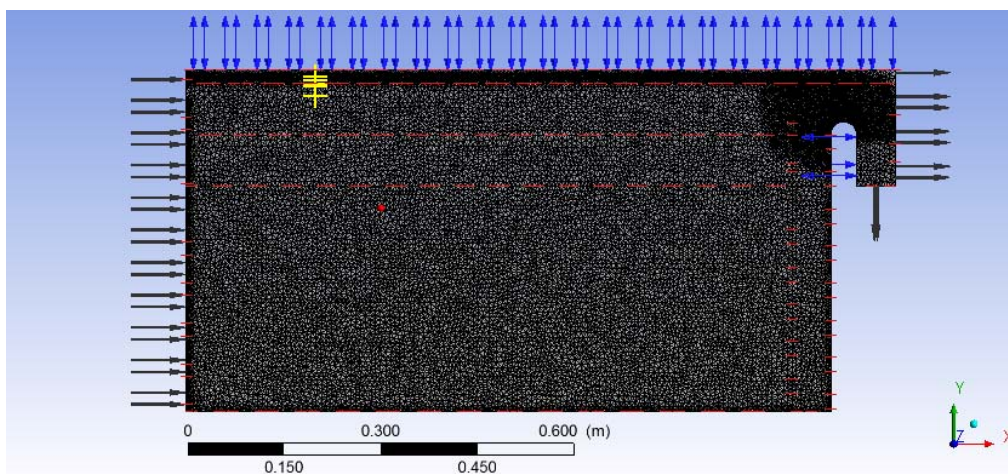


Figura 4 Ejemplo de mallado, con una densidad de mallado variable y condiciones de contorno del problema.

## 5 Análisis de Resultados y Estudio de Sensibilidad

El análisis de los resultados obtenidos se desarrolla en la forma de estudio de sensibilidad de los diferentes factores que pueden afectar a los resultados, de modo que es analizada la importancia de cada uno de ellos, para con esto definir la mejor aproximación al problema.

## 5.1 Tamaño del mallado

El tamaño del mallado se ha encontrado como uno de los factores más importantes en la correcta simulación del problema, influyendo en los siguientes aspectos:

- El mallado en el entorno de las paredes debe densificarse no sólo para representar correctamente la geometría del vertedero, sino también para permitir la correcta representación de los fuertes gradientes de velocidades que en las proximidades del vertedero se producen.
- El método de VOF permite con gran eficacia la resolución de un problema de flujo de fluidos inmiscibles, representado las fronteras de cada fluido en términos de la fracción de volumen ocupado por el líquido. Sin embargo, la posición exacta en la que se sitúa la superficie de la lámina de agua no queda completamente definida, sino que la resolución numérica define las celdas sobre las que podría localizarse esta superficie, donde  $F$  adopta valores distintos de 0 y 1. Esto implica que para la obtención precisa de la posición de la lámina de agua deba reducirse el tamaño del mallado, con la finalidad de acotar el error con el que puede estimarse, sin embargo eso requiere un previo conocimiento de la posición aproximada en la que se va a situar estas superficies de contacto, y por otro lado una alta precisión puede llegar a exigir un muy alto número de celdas, debido a la alta densidad del mallado. La solución adoptada ha sido densificar el mallado localmente en la zona donde se prevé se sitúa la superficie de la lámina de agua. Eso obliga a que el mallado sea particular para cada geometría y caudal de sobrevertido. En general en este problema se ha encontrado que la franja en la que puede oscilar la posición real de la lámina de agua es de una anchura igual a dos veces la anchura del mallado en la dirección perpendicular a la superficie de la lámina de agua.

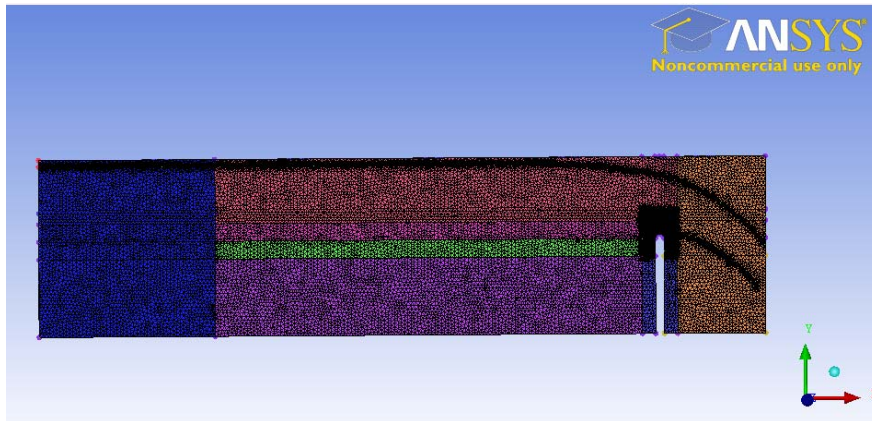


Figura 5 Ejemplo de mallado ajustado para un determinado caudal de sobrevertido.

## 5.2 Condiciones de aireación de la zona inferior del chorro

Experimentalmente se comprueba que la diferencia entre flujo atmosférico y subatmosférico puede llegar a ser importante a efectos de la distribución de presiones y del propio coeficiente de descarga del vertedero. Para contrastar la capacidad de representar este efecto por el modelo numérico, se comparan resultados de simulación con y sin la condición de presión atmosférica en la cara aguas abajo de la pared del vertedero.

Los resultados de diferentes simulaciones se muestran en la siguiente tabla, donde puede apreciarse el diferente comportamiento que presenta los valores del coeficiente de descarga en función de las condiciones de aireación. Las condiciones de parte inferior del chorro no aireada producen un flujo sobre el vertedero subatmosférico, lo que aumenta el coeficiente de descarga del vertedero con respecto de las condiciones aireadas, donde los coeficientes de descarga se mantienen inferiores, alcanzado aparentemente un valor constante de  $C_d = 0.81$ , ligeramente superior al valor estimado experimentalmente cuando es la profundidad quien limita el coeficiente de vertedero.

Tabla 1 Valores obtenidos del coeficiente de descarga en condiciones de flujo aireado y no aireado bajo el chorro

No aireado	h/R	Cd
	11.3	0.86
	5.2	0.94
	3.0	0.87
	1.7	0.81
	1.0	0.70
Aireado	h/R	Cd
	16.9	0.81
	11.9	0.81
	5.5	0.82
	3.0	0.85
	1.7	0.79
	1.0	0.68

En relación a la distribución de presiones, la representación de la distribución real de presiones en ambos casos es cualitativamente correcta, como se puede apreciar comparando las figuras siguientes.

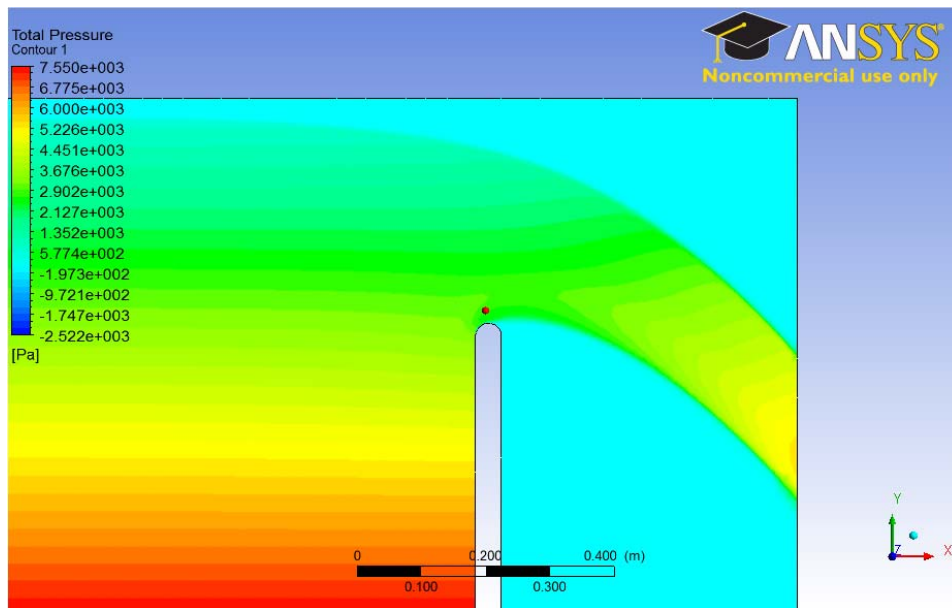


Figura 6 Representación de la distribución de presiones en el caso de condición de flujo atmosférico.

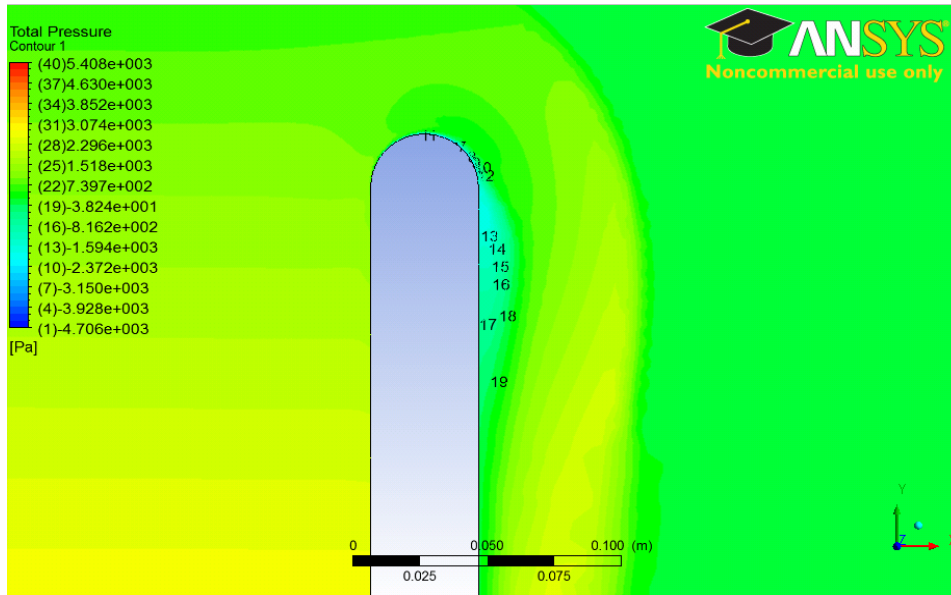


Figura 7 Representación de la distribución de presiones en el caso de condición de flujo subatmosférico.

### 5.3 Condición de contorno de no deslizamiento sobre el vertedero

En relación a las condiciones de contorno que se imponen sobre las paredes del vertedero, existen diferentes alternativas, todas ellas bajo la condición de no deslizamiento del flujo sobre la pared, es decir, velocidad nula. En primer lugar puede considerarse una condición de pared lisa o de pared rugosa. Además para simular el flujo turbulento que se produce especialmente en el entorno de las paredes, puede adoptarse el modelo de turbulencia k- $\epsilon$ , o el modelo SST (*Shear Stress Transport*).

- La comparación entre simulaciones en las que se ha impuesto condiciones de pared lisa o pared rugosa arroja una clara diferencia entre ambos comportamientos, siendo más real la condición de pared rugosa, aun cuando la altura de rugosidad impuesta sea muy pequeña, por proporcionar valores del coeficiente de descarga del vertedero más próximos a los experimentales. Esta es la condición que efectivamente se ha considerado en las simulaciones, si bien el valor de la rugosidad, tras variarlo entre 0.1 y 3 mm se muestra poco sensible al resultado, el más próximo a los resultados experimentales es el modelo con rugosidad fijada en 0.1 mm.
- El empleo para cuantificar el efecto de las turbulencias del modelo k- $\epsilon$ , o el modelo SST produce escasa sensibilidad para condiciones de flujo a presión, pero en general, y particularmente para condiciones de flujo atmosférico o subatmosférico, el comportamiento del modelo k- $\epsilon$  es más próximo a los resultados experimentales, por este motivo este es el modelo en general empleado en este trabajo.

### 5.4 Tensión superficial

La tensión superficial sólo se muestra sensible a los resultados del coeficiente de descarga para caudales muy pequeños, en condiciones de flujo atmosférico, si bien su efecto se encuentra por debajo del 1% de variación sobre este coeficiente, para un radio de curvatura del vertedero de 2 cm. Cabría esperar que radios menores pudieran ser más sensibles a considerar el efecto de la tensión superficial, no obstante esto no se ha comprobado.

### 5.5 Análisis de errores

La estimación del coeficiente de descarga, o el coeficiente de vertedero, de un vertedero requiere comparar valores medidos de altura de sobrevertido, o más exactamente, diferencia entre la altura de energía en la aproximación al vertedero y la cota del umbral del vertedero, y el caudal de sobrevertido. Ambas variables, tanto en su medición en modelos físicos experimentales como en la simulación numérica, su estimación o medición



está sujeta a error. Para cuantificar el efecto de ambas fuentes de error sobre el coeficiente de vertedero se parte de la ecuación del vertedero, en la siguiente forma:

$$C_d = \frac{Q}{L \cdot \frac{2}{3} \cdot h^{1.5}}$$

Desarrollando esta expresión de modo aproximado como serie de Taylor de primer orden se tiene:

$$C_d + \varepsilon_{C_d} \approx \frac{Q}{L \cdot \frac{2}{3} \cdot h^{1.5}} + \frac{\varepsilon_Q}{L \cdot \frac{2}{3} \cdot h^{1.5}} - \frac{3}{2} \frac{Q}{L \cdot \frac{2}{3} \cdot h^{2.5}} \cdot \varepsilon_h$$

$$\frac{\varepsilon_{C_d}}{C_d} = \frac{\varepsilon_Q}{Q} - \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_h}{h}$$

El error relativo producido en la estimación del coeficiente de descarga está condicionado por el error en la medición o estimación del caudal y de la altura de energía sobre el vertedero.

La principal fuente de incertidumbre en las estimaciones obtenidas a través del modelo numérico es en la medición del nivel de energía aguas arriba, con error relativo entorno al 5%, para un  $h/R = 2$ , mientras que el error relacionado con la estimación del caudal se limita al 0.5 %. Esto ocasiona que el error máximo que puede esperarse en la estimación del coeficiente de descarga se sitúe en 7.5 %, provocado por el error en la estimación de la posición de la lámina de aguas arriba del vertedero.

## 6 Conclusiones

La capacidad de la modelación numérica para simular las condiciones de flujo que se producen entorno a un vertedero semicircular ha sido evaluada en este trabajo. La representación de las condiciones de flujo que se producen en el entorno del vertedero se han demostrado bien reproducidas, siendo capaz de reproducir comportamientos como los observados experimentalmente, especialmente los referidos a las diferencias entre condiciones de flujo atmosféricas y subatmosféricas.

El factor que se han encontrado más importantes en la definición del modelo para la simulación del problema es la densidad de mallado, como aspecto de mayor importancia, tanto para representar los fuertes cambios que se producen en el flujo entorno a las paredes del vertedero, como para cuantificar con error limitado la posición de la lámina de agua. Además resulta también de importancia la consideración de superficie rugosa en la condición de contorno sobre las paredes del vertedero. Por su parte, los resultados se aproximan en mayor medida a los experimentales al utilizar el modelo de turbulencia k- $\varepsilon$ , frente al modelo SST.

A pesar de la capacidad que tiene el modelo de representar las condiciones de flujo, la estimación del coeficiente de descarga, y su relación para las condiciones de flujo analizadas con la relación  $h/R$ , mantiene desviaciones sobre los resultados experimentales. Concretamente, para altos valores de  $h/R$  el valor esperado es de  $C_d = 0.75-0.76$ , mientras que el valor estimado a través de las simulaciones numéricas se sitúa en  $C_d = 0.81$ , lo que suponen una desviación del 7%.

No obstante, cabe destacar que la estimación del coeficiente de descarga es muy sensible a errores tanto en la estimación de la posición de la lámina de agua como en la estimación del caudal de sobrevertido. Por ello, con la finalidad de poder utilizar los modelos de simulación numéricos para estimar las condiciones de control hidráulico que imponen estructuras en vertedero, resulta de gran interés la adopción de medidas para limitar los errores que puedan producirse en la definición de la superficie de la lámina de agua.

## 7 Referencias Bibliográficas

ANSYS Inc. (2005). Versión 10.0. [www.ansys.com](http://www.ansys.com).

Chanson, H. (2004). "The Hydraulics of Open Channel Flow: An Introduction." Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2ª Edición, 630 pp (ISBN 978 0 7506 5978 9).

Chatila, J., y M. Tabbara (2004). "Computational modeling of flow over an ogee spillway". Computers and Structures 82 (2004) 1805–1812

Chen, Q.; G. Dai y H. Liu (2002). "Volume of Fluid Model for Turbulence Numerical Simulation of Stepped Spillway Overflow". Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 128, No. 7, July 1.

Falvey, H. T. (2002). "Hydraulic Design of Labyrinth Weirs". ASCE Press, Virginia, EEUU.

Hirt, C.W., Nichols, B.D. (1981). "Volume of fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries". J. Comput. Phys. 39(1), 201–225.

Ho, D.H., K.M. Boyes y S.M. Donohoo (2001). "Investigation of Spillway Behaviour under Increased Maximum Flood by Computational Fluid Dynamics Technique". 14th Australasian Fluid Mechanics Conference. Adelaide University, Adelaide, Australia, 10-14 December.

Lauder, B.E., y D. B. Spalding (1974). "The numerical computation of turbulent flows". Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 3(2), 269–289.

Sarker, M.A., y D.G. Rhodes (2004). "Calculation of free-surface profile over a rectangular broad-crested weir". Flow Measurement and Instrumentation 15, 215–219.

Savage, B.M., y M. C. Johnson (2001). "Flow Over Ogee Spillway: Physical and Numerical Model Case Study". Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 127, No. 8, August.

Tullis, J. P., y N. Amanian (1995). "Design of Labyrinth Spillways". Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 121, N° 3.