Condiciones de contorno internas en flujos transitorios bidimensionales: aplicación a regulación de compuertas en ríos

Morales- Hernández, M., Murillo, J., García-Navarro, P. Universidad de Zaragoza mmorales@unizar.es

1 Introducción

Las condiciones de contorno internas responden a la necesidad de evaluar situaciones no contempladas por los sistemas de ecuaciones en los que se basan los modelos de simulación utilizados. Con este fin, se definen condiciones de contorno internas donde hay que imponer un número de variables adecuadas según sea el flujo. En este trabajo se incluye la modelización de compuertas como una discontinuidad entre las superficies de las celdas adyacentes

La discretización de este tipo de condición de contorno que modela el flujo a presión en una compuerta y que garantiza una correcta conservación de la masa se detalla en la primera parte de este trabajo. La forma más explícita de regular el flujo másico es utilizar como condición de contorno el caudal unitario que atraviesa la compuerta en función de los niveles.

La segunda parte de este trabajo consiste en aplicar esta formulación a un caso test académico. Éste consiste en un río provisto de tres áreas de inundación controlada conectadas al río a través de tres compuertas laterales. Se consideran estas zonas de almacenamiento como posible herramienta para intentar mitigar el efecto de las crecidas. Además se utiliza la herramienta del análisis dimensional para conocer las variables que gobiernan nuestro fenómeno. Por último, con el fin de obtener un aprovechamiento óptimo de las áreas de las zonas inundables se han implementado dos algoritmos sencillos de regulación: un mecanismo *On/Off* y un controlador PID.

2 Modelización matemática

2.1 Ecuaciones de aguas poco profundas y esquema numérico

Las ecuaciones de aguas poco profundas pueden ser formuladas como un conjunto de ecuaciones que expresan la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento [3], [6]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{U}, x, y)$$
(2.1)

donde

$$\mathbf{U} = (h, q_x, q_y)^T \qquad \mathbf{F} = \left(q_x, \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2, \frac{q_xq_y}{h}\right)^T \qquad \mathbf{G} = \left(q_y, \frac{q_xq_y}{h}, \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2\right)^T$$
(2.2)

h es la profundidad del agua, q_x y q_y caudales unitarios a lo largo de las direcciones coordenadas x, y respectivamente. Se supone presión hidrostática. La parte derecha de la igualdad en el sistema de ecuaciones, **S**, contiene las fuentes y sumideros de la cantidad de movimiento a lo largo de las dos direcciones coordenadas, por variaciones del fondo del cauce y de las pérdidas por fricción que deben estar relacionadas con el campo de velocidades.

Respecto a la técnica de resolución de las ecuaciones, se ha usado un método 'upwind' de volúmenes finitos porque combina lo mejor de los métodos de elementos finitos y su flexibilidad geométrica, con lo mejor de los métodos en diferencias finitas, su flexibilidad en la definición del flujo discreto (valores discretos de las variables dependientes y sus flujos asociados) [3].

El esquema descentrado explícito de primer orden toma la forma [6]

$$\mathbf{U}_{i}^{n+1} = \mathbf{U}_{i}^{n} + \Delta t \sum_{k=1}^{NE} \sum_{m=1}^{3} \left(\left(\widetilde{\lambda}^{-} \alpha - \beta^{-} \right) \widetilde{\mathbf{e}} \right)_{k}^{m} l_{k} / A_{i}$$
(2.3)

y permite resolver los valores de calado y caudal en cada celda y en cada instante (\mathbf{U}_i^{n+1}) en función de los del tiempo anterior (\mathbf{U}_i^n), y de las contribuciones del flujo que se producen a través de los lados (*NE*) de cada celda de cálculo de área A_i a lo largo de un paso de tiempo Δt .

2.2 Modelos de compuertas

La modelización de las compuertas se puede tratar como un caso especial de condición de contorno en la que es necesario considerar diferentes situaciones no incluidas dentro de las hipótesis de flujo en superficie libre como puede ser el flujo a presión. El modelo a elegir ha de ser totalmente general y capaz de contemplar todo tipo de situaciones, como desniveles de fondo a ambos lados y simular tanto flujo libre como ahogado en ambos sentidos.

Para ello, se utilizan principios básicos de conservación, en este caso, la cantidad de agua conservada. La forma más explícita de regular el flujo másico es utilizar el caudal unitario q circulante a través de la compuerta. De esta forma, este valor será compartido por las celdas a ambos lados de la compuerta. Cuando el flujo entra en presión [5], el caudal unitario que atraviesa la compuerta viene gobernado por la diferencia de niveles superficiales [2], d = h + z, existentes a ambos lados de la compuerta, donde h es el calado y z la elevación del fondo.

En lo que sigue nos referiremos como d_2 al nivel aguas arriba de la compuerta y d_1 al nivel aguas abajo, así como G_0 a la apertura de la compuerta. Esto permite incluir la presencia de discontinuidades en la elevación del terreno exactamente donde está situada la compuerta. Cuando $G_0 = 0$, la compuerta se convierte automáticamente en una pared sólida. Sin pérdida de generalidad, asumimos $d_2 > d_1$ (el caso $d_1 > d_2$ es análogo) y se generan cuatro posibles escenarios que dependen de los posibles niveles superficiales ($d_2 y d_1$) y elevación del terreno ($z_2 y z_1$) aguas arriba y aguas abajo de la compuerta.

2.2.1 Caso 1:
$$z_1 > z_2, d_2 - z_1 > G_0, d_1 > z_1 + G_0$$

Este caso se ilustra en la Figura 1 y el caudal que atraviesa la compuerta viene dado por la expresión

$$q = G_0 K_1 (d_2 - d_1)^{\frac{1}{2}}$$
(2.4)

donde K_1 es una constante empírica [2].

2.2.2 Caso 2:
$$z_1 > z_2$$
, $d_2 - z_1 > G_0$, $d_1 \le z_1 + G_0$

Se ilustra en la Figura 2 y el caudal unitario se expresa mediante

$$q = G_0 K_2 (d_2 - z_1)^{\frac{1}{2}}$$
(2.5)

donde K_2 es una constante empírica [2].

2.2.3 Caso 3: $z_2 \ge z_1$, $h_2 > G_0$, $d_1 > z_2 + G_0$

Se trata de un caso similar al caso 1, pues la diferencia de niveles superficiales es la misma (ver Figura 3). Por lo tanto, la ecuación que nos proporciona el caudal que atraviesa la compuerta viene dada por la misma expresión que en el caso 1.

$$q = G_0 K_1 (d_2 - d_1)^{\frac{1}{2}}$$
(2.6)

2.2.4 Caso 4: $z_2 \ge z_1$, $h_2 > G_0$, $d_1 \le z_2 + G_0$

En la Figura 4 queda ilustrado lo que ocurre en este caso 4. El caudal unitario q se expresa mediante

$$q = G_0 K_2 (d_2 - h_2)^{\frac{1}{2}} = G_0 K_2 (h_2)^{\frac{1}{2}}$$
(2.7)



3 Caso test

En los últimos años, existe un interés creciente por parte de las Confederaciones Hidrográficas en intentar reducir el pico de caudal que se produce en las crecidas mediante la utilización de áreas de inundación controlada. Cuando llega la cresta de la crecida, se activan los mecanismos de regulación de las compuertas que dan entrada a estas zonas de inundación, lo que permite que se almacene una gran cantidad de agua, que deja de circular por el río. Después, una vez que ya no existe ningún tipo de peligro, esta agua es devuelta al río de nuevo mediante los mecanismos de regulación mencionados anteriormente. A continuación se presenta el caso test que se ha utilizado para la realización de este trabajo.

3.1 Cauce

Se ha tomado como ejemplo simplificado para este fin; un tramo de un río ficticio con tres zonas de inundación controlada, compuertas en cada una de estas áreas que permiten el paso del agua en ambos sentidos y paredes verticales a lo largo del río donde no hay compuerta. La línea del cauce es una curva sinusoidal que viene representada por las ecuaciones:

$$x(t) = t y(t) = \frac{a}{1 + \left(\frac{t}{b} - 1\right)^2} cos(kt) (3.1)$$

$$t = [0, 6000]$$
 $a = 400$ $b = 3000$ $k = \frac{2\pi}{2000}$ (3.2)

La sección del cauce del río es triangular, con el mismo tamaño a lo largo de todo el tramo. Las paredes verticales se han establecido en 8 m de altura. Puede verse en la Figura 5.



Figura 5 Sección transversal

3.2 Elevación topográfica y malla

3.2.1 Elevación topográfica

Para cada punto del dominio, $x \in [0, 6000]$, $y \in [-2000, 2000]$ se calcula su distancia mínima al cauce. A esta distancia la llamaremos d. Si d > 40 se le asigna una pendiente de 1/1000. Posteriormente aplicamos una z_b diferente en función de la coordenada x:

$$z_b = z_b + \frac{1}{1000} (6000 - x) \tag{3.3}$$

En la Figura 6 (izquierda) se presenta el caso test con su correspondiente elevación del terreno.

3.2.2 Malla

Se ha utilizado una malla triangular no estructurada compuesta por 18812 celdas y 9484 nodos. En la Figura 6 (derecha) se puede ver la malla.



Figura 6 Elevación topográfica (izquierda) y malla (derecha)

3.3 Condiciones iniciales y de contorno

3.3.1 Condición inicial

En todos los casos vamos a partir de un estado estacionario de 100 m³/s. Para conseguir esto, partimos de una situación de un río seco, imprimiendo un caudal de entrada constante de 100 m³/s hasta que el caudal aguas abajo sea igual al caudal entrante.

3.3.2 Condiciones de contorno

Las entradas y salidas de flujo, así como las compuertas son condiciones de contorno en nuestro sistema. Por lo tanto, tendremos una condición de contorno a la entrada del cauce, en forma de hidrograma, y una condición de contorno a la salida. Para proporcionar las entradas de flujo se han utilizado dos tipos de hidrogramas: hidrogramas gaussianos y SCS (Soil Conservation Service). Estos dos tipos de hidrogramas se han elegido porque es muy fácil trabajar con ellos, sobre todo a la hora de calcular el volumen de agua que transportan.

Para la condición de contorno a la salida se ha utilizado una ley de flujo normal:

$$S_0 = \frac{1}{1000} \qquad S_f = \frac{Q |Q| n^2}{A(h)^2 R_h(h)^{4/3}}$$
(3.4)

donde A(h) = área mojada, $R_h(h)$ = Radio hidráulico que a su vez se calcula mediante $R_h = \frac{A}{P_m}$ donde

 P_m es el perímetro mojado. Imponemos $S_0 = S_f$ y realizando una tabla con valores discretos de (h, Q) obtenemos la condición de contorno a la salida del cauce.

3.3.2.1. Compuertas

Las compuertas se definen a través de una condición de contorno interna en la que se impone un flujo másico que las atraviesa. Este flujo másico en la compuerta es modelado utilizando $K_1 = 3.33$ y $K_2 = 2.248$ en (2.4)--(2.7).

4 Análisis dimensional

Supondremos que el amortiguamiento en el caudal pico depende de cinco variables, a saber,

$$\Delta Q_{p} = f(\Delta t_{G_{0}}, G_{0}, V, Q_{p_{e}}, t_{a})$$
(4.1)

 $Q_{p_s} = pico de caudal a la salida en m³/s$, $Q_{p_e} = pico de caudal a la entrada m³/s$ $t_{ac} = tiempo de apertura de la compuerta en s$ $t_{cc} = tiempo de cierre de la compuerta en s$ $G_0 = apertura de la compuerta en m$ V = volumen del hidrograma en m³

$$\Delta Q_p = |Q_{p_s} - Q_{p_e}| \qquad \Delta t_{G_0} = t_{cc} - t_{ac}$$

Adimensionalizando nuestras variables se prueba que

$$\frac{\Delta Q_p}{Q_{p_e}} = F\left(\frac{\Delta t_{G_0} Q_{p_e}}{V}, \frac{t_{ac} Q_{p_e}}{V}, \frac{G_0}{V^{\frac{1}{3}}}\right)$$
(4.2)

Por lo tanto, sólo nos queda estudiar la influencia de cada uno de estos parámetros

$$\Pi_{\Delta t_{G_0}} = \frac{\Delta t_{G_0} Q_{p_e}}{V} \qquad \Pi_{t_{ac}} = \frac{t_{ac} Q_{p_e}}{V} \qquad \Pi_{V} = \frac{G_0}{V^{\frac{1}{3}}}$$
(4.3)

en el descenso del pico de caudal. El procedimiento es simple: mantendremos dos de ellos constantes y haremos variar el otro para ver la relación existente entre el amortiguamiento y este último parámetro (ver Tabla 1).

	$\Pi_{\Delta t_{G_0}}$	$\Pi_{t_{ac}}$	Π_V
Caso 1	Constante	Variable	Constante
Caso 2	Variable	Constante	Constante
Caso 3	Constante	Constante	Variable

4.1 Consideraciones previas

Este análisis se va a realizar teniendo en cuenta la influencia de un solo depósito o área de inundación. En concreto, será siempre el tercer depósito (el que está aguas abajo). Por otra parte, la compuerta permanecerá, o bien cerrada, o bien abierta totalmente (8 m). Asimismo, la variación de los picos de caudal elegidos para realizar este estudio va desde 500 m³/s a 1000 m³/s aumentando de 50 en 50 m³/s y considerando que partimos de un estado estacionario con caudal igual a 100 m³/s.

4.2 Caso 1: $\Pi_{\Delta t_{G_0}} = 0.9$ $\Pi_V = 0.00817$

En este primer caso se ha tratado de ver la relación que hay entre el amortiguamiento en el pico de caudal y el instante de tiempo en el que se abre la compuerta, permaneciendo constante el tiempo durante el que está abierta esta misma compuerta. Imponer $\Pi_{\Delta t_{G_0}}$ y Π_V constantes implicaba tomar por un lado un volumen constante del hidrograma y al variar el pico de caudal a la entrada, ir variando el tiempo que está abierta la compuerta para conseguir un valor constante en $\Pi_{\Delta t_{G_0}}$.



Figura 7 Influencia del instante de apertura

Como puede observarse, en el eje de ordenadas se representa el descenso en el pico de caudal dividido por el caudal pico a la entrada. Este dato nos da una idea en tanto por uno de la cantidad de agua que se almacena en el depósito en comparación con la que discurre por el cauce. Es decir, lo que buscamos nosotros es que ese valor sea lo más cercano a 1 posible. Cuanto más se aproxime este valor a 0 querrá decir que la apertura que estamos considerando es menos eficiente. En el eje de abscisas se representa el parámetro adimensional $\Pi_{t_{ac}}$.Si mantenemos constante el tiempo en el que está abierta la compuerta y abrimos la compuerta o bien muy pronto o bien muy tarde, el depósito no 'reduce el hidrograma entrante' de una manera óptima. Esto lo vemos en los dos primeros tiempos de apertura y en los dos últimos (se abre demasiado pronto y demasiado tarde respectivamente).

4.3 Caso 2: $\Pi_{t_{ac}} = 0.4$ $\Pi_{V} = 0.00817$

Análogamente al Caso 1, se ha elegido un valor constante en el volumen del hidrograma. Puesto que se ha variado el pico de caudal de igual manera que en el caso anterior y ahora se pretende que sea $\Pi_{t_{ac}}$ el que quede fijo, se propone para este Caso 2 variar el tiempo de apertura con el pico de caudal para conseguir un valor constante (en este caso se ha elegido un valor de $\Pi_{t_{ac}} = 0.4$).

Lo que se representa en la Figura 8 es la relación que hay entre el amortiguamiento del pico de caudal y el tiempo en el que permanece abierta la compuerta.

Si el instante de apertura es fijo y el tiempo que se deja la compuerta abierta es muy pequeño (valores de más a la izquierda en la gráfica) el amortiguamiento es muy bajo. Sin embargo cuando nos movemos entre valores de 0.8 y 1 (siempre considerando que $\Pi_{t_{ac}} = 0.4$ constante), en todos los casos simulados con caudales pico distintos, el aprovechamiento del depósito ya es óptimo.

Además se observa que, conforme más grande es el parámetro $\prod_{t_{ac}}$ (esto es, el instante en el que se abre es mayor) más pronunciada es la pendiente de la función meseta hasta alcanzar el amortiguamiento óptimo.

4.4 Caso 3: $\Pi_{\Delta t_{G_0}} = 0.9$ $\Pi_{t_{ac}} = 0.4$

En este tercer caso queremos relacionar la influencia que tiene el volumen del hidrograma en la reducción del pico de caudal, dejando constantes el tiempo que se encuentra abierta la compuerta y el instante en el que se abre (para cada pico de caudal).

Se ha variado nuevamente los picos de caudal, esta vez de 500 m³/s a 950 m³/s. Este caso en un poco diferente a los anteriores, pues estamos variando el volumen del hidrograma, parámetro que está incluido en los demás grupos adimensionales, por lo tanto, para poder mantener constantes $\Pi_{\Delta t_{G_0}}$ y $\Pi_{t_{ac}}$ hay que variar los otros parámetros involucrados. En la Figura 9 se muestran los resultados.



Figura 8 Influencia del tiempo en el que está abierta la compuerta



Figura 9 Influencia del volumen en el amortiguamiento del pico de caudal

Concluimos que cuanto más pequeño es el volumen dentro de cada pico de caudal, más amortiguado es el pico del hidrograma saliente. Dos hidrogramas de entrada pueden tener distintos picos de caudal y el mismo volumen de agua pero la laminación que se produce no es la misma en los dos casos. En un hidrograma más 'picudo' se consigue laminar mucho más que en un hidrograma más 'suave'.

5 Algoritmos de regulación

El algoritmo de regulación o de control es un procedimiento que procesa unas entradas, por ejemplo medidas de nivel, y proporciona una acción de control, o sea, un movimiento de compuerta. El objetivo del algoritmo de control en nuestro caso es ajustar la posición de las compuertas del canal de acuerdo con el método de control establecido. En función de los niveles reales y el nivel de referencia o *setpoint*, el algoritmo proporcionará una nueva posición para la compuerta sobre la que actúe (los niveles reales no son medidos con sensores, sino que son obtenidos mediante el método de simulación del flujo).

La salida del algoritmo es una consigna para la compuerta. Es decir, se obtiene una función discreta (definida sólo en instantes determinados de tiempo) de posición de la compuerta [4]. Por lo tanto, será necesario discretizar la ecuación del controlador, como se verá más adelante.

5.1 Controlador básico On/Off

Actualmente, en la mayoría de compuertas que se instalan con el fin de utilizar las llanuras de inundación controlada para almacenar el agua de las grandes crecidas, se utiliza un mecanismo de control bastante sencillo: se establece un nivel de referencia; mientras la altura de agua en el río es menor que el nivel de referencia la compuerta permanece cerrada. En el momento en que el calado en el río supere ese nivel, inmediatamente la compuerta se abre y deja pasar el agua a la zona de inundación. Cuando el nivel del agua vuelve a bajar por debajo del umbral preestablecido, la compuerta vuelve a girar y se cierra. Por último el agua se devuelve al río una vez haya pasado el episodio de lluvia. Se trata de un sistema de control muy básico, apodado según la literatura existente On/Off, pues la compuerta permanece abierta o cerrada completamente en cada instante de tiempo.

5.2 Controlador PID

5.2.1 El algoritmo

La ecuación del controlador PID, escrita en su forma en el dominio del tiempo es la siguiente [1]:

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) = P + I + D$$
(5.1)

donde *u* es la acción que genera el controlador, en este caso, una apertura para la compuerta, *e* es el llamado error de control ($e = y - y_{ref}$) donde y_{ref} es variable objetivo o *setpoint*, *y* es variable medida en el sistema. Los parámetros del controlador son la constante proporcional K, el tiempo de integración T_i y el tiempo diferencial T_d . Para poder utilizar este método es necesario, aparte de discretizar la ecuación (5.1), ajustar los parámetros *K*, T_i y T_d para cada sistema mediante métodos *tunning* de controladores PID. Se han utilizado dos métodos (Ziegler-Nichols y Cohen-Coon) [4] para el ajuste empírico de nuestro sistema proporcionándose los siguientes valores: K = 3.4984 $T_i = 3743.92$ $T_d = 935.98$

5.2.2 Representación discreta del PID

Para discretizar el controlador es necesario aproximar la integral y la derivada mediante diferencias finitas llegando a:

$$u(t_{k}) = u(t_{k-1}) + \alpha_{1} K \left(1 + \frac{T_{s}}{T_{i}} + \frac{T_{d}}{T_{s}} \right) \left(y_{ref} - y(t_{k}) \right) - \alpha_{2} K \left(1 + \frac{2T_{d}}{T_{s}} \right) \left(y_{ref} - y(t_{k-1}) \right) + \alpha_{3} K \frac{T_{d}}{T_{s}} \left(y_{ref} - y(t_{k-2}) \right)$$
(5.2)

donde α_i son factores de peso que dotan de estabilidad al algoritmo e y es el valor actual de la variable controlada.

5.2.3 Resultados

En este apartado se presentan los resultados que se han obtenido a raíz de la implementación de estos dos tipos de algoritmos de control diferentes. Se incluyen dos ejemplos de hidrogramas, cada uno con sus correspondientes métodos de control, para poder observar las diferencias entre unos y otros.

Con cada uno de los dos hidrogramas que aquí se presentan, se han simulado 4 casos: con las compuertas completamente cerradas, es decir, sin áreas de inundación controlada; sin regulación, o sea, las compuertas completamente abiertas; con una regulación On/Off y con un controlador PID. Como resultados se presentan las Figuras siguientes (10-17): para cada hidrograma y cada mecanismo de regulación se incluye una figura en la que se representan los caudales a la entrada y a la salida, así como las aperturas correspondientes.



Figura 10 Apertura =0.0 m

Figura 11 On/Off



Figura 12 PID

Figura 13 Apertura = 8.0 m

Tanto en el primer hidrograma (Figuras 10-13) como en el segundo (Figuras 14-17), la primera conclusión es obvia: la habilitación de zonas de inundación controlada (aún sin algoritmo de control) consigue laminar el hidrograma entrante de una manera considerable. Además se observa igualmente que la laminación que producen los mecanismos *On/Off* y el controlador *PID* es muy parecida. Si se trabajan con caudales pequeños no merece la pena la instalación de ningún tipo de algoritmo de control. Si los caudales son grandes, la utilización de un algoritmo de control es fundamental dado que se consigue una laminación mucho mayor del hidrograma. Además frente a situaciones de crisis, por ejemplo con una gran avenida, no resulta suficiente tener las compuertas abiertas desde el primer momento, dado que se pueden llenar las áreas de inundación antes de que la punta de la crecida haya llegado. En este contexto se tiene que tener en cuenta el volumen del hidrograma de avenida y compararlo con el volumen potencialmente almacenable en el conjunto de todas las áreas inundables disponibles, para poder gestionar mejor con un algoritmo de regulación la entrada y salida de agua a las zonas inundables.





Figura 14 Apertura=0.0 m

Figura 15 On/Off



6 Conclusiones

La utilización de las áreas de inundación controlada con el objetivo de intentar reducir el pico de caudal que se produce en las grandes avenidas se demuestra como una técnica efectiva para reducir los picos de caudal. Si se combina con la simulación numérica de ondas de avenidas y la implementación de algoritmos de regulación, se convierte en una herramienta útil para la gestión de las avenidas.

7 Bibliografía

[1] K.J.Ästrom Control System Design, A Prentice Hall Internation UK., 2002

[2] F.M. Henderson Open channel Flow MacMillan series in civil Engineering

[3] J. Murillo, J. Burguete, P. Brufau, and P. García-Navarro. The influence of source terms on stability, accuracy and conservation in two-dimensional shallow flow simulation using triangular finite volumes. *International Journal of Numerical Methods in Fluids* 54, 543--590, 2007.

[4] **K. Ogata** Ingeniería de control moderna. *Prentice Hall*, 2^{*a*} Ed.

[5] **Sepulveda, C., Gomez, M., Rodellar, J.** Benchmark of discharge calibration methods for submerged sluice gates. *Journal of irrigation and drainage engineering, Octubre 2009, vol. 135, núm. 5, p. 676-682.*

[6] **E.F. Toro**. Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows. *Wiley, New York, 2001,p. 109, 2001.*